

Übung 12

Nachbesprechung

11.3.) Zu beweisen: $d_{\min}(D) = \min(2d_{\min}(U), d_{\min}(V))$

$$d_{\min}(D) = \min_{d \in D \setminus \{0^n\}} \text{hw}(d) \quad (11.2.)$$

($\leq$) Sei $u \in U \setminus \{0^n\}$ so dass $\text{hw}(u) = \min_{c \in U \setminus \{0^n\}} \text{hw}(c) \stackrel{11.2.}{=} d_{\min}(U)$

Sei $c = u \parallel u + 0^n \in D$ (Linearität von V)

$$d_{\min}(D) \leq \text{hw}(c) = \text{hw}(u) + \text{hw}(u) = 2d_{\min}(U)$$

Analog $d_{\min}(D) \leq d_{\min}(V)$ ($c = 0^n \parallel v$)

$$\Rightarrow d_{\min}(D) \leq \min(2d_{\min}(U), d_{\min}(V))$$

Wenn ihr beliebiges $u' \in U$ wählt, dann gilt $\text{hw}(u') \geq d_{\min}(U)$, nicht Gleichheit. Aus $d_{\min}(D) \leq 2\text{hw}(u') \geq 2d_{\min}(U)$ kann man nicht $d_{\min}(D) \leq 2d_{\min}(U)$ schließen

($\geq$) Seien $u \in U, v \in V$ beliebig. $(u, v) \neq 0^{2n}$

$$\text{hw}(u \parallel u + v) = \text{hw}(u) + \text{hw}(u + v) = \text{hw}(-u) + \text{hw}(u + v) \stackrel{11.1.}{\geq} \text{hw}(v)$$

Oft wurde stattdessen $\text{hw}(u) + \text{hw}(u + v) \times 2\text{hw}(u) + \text{hw}(v)$ geschrieben

CNF und DNF

Normalformen. Für jede Formel F existieren Formeln F_{CNF} und F_{DNF} in CNF bzw. DNF, die äquivalent sind zu F

$$\text{CNF: } (L_{11} \vee \dots \vee L_{1m_1}) \wedge \dots \wedge (L_{n1} \vee \dots \vee L_{nm_n})$$

↑
conjunction (= Und-Verknüpfung)

$$\text{DNF: } (L_{11} \wedge \dots \wedge L_{1m_1}) \vee \dots \vee (L_{n1} \wedge \dots \wedge L_{nm_n})$$

↑
Disjunction (= Oder-Verknüpfung)

Wobei L_{ij} Literale sind (also atomare Var. oder deren Negation)

keine Implikationspfeile erlaubt

Aufg. Finde F_{CNF} und F_{DNF} äquiv.

zu $F = \underbrace{\neg(A \vee B)}_G \vee \underbrace{\neg(C \vee \neg(A \wedge \neg B))}_I$

$$F_{DNF} = (\neg A \wedge \neg B \wedge \neg C) \vee (\neg A \wedge \neg B \wedge C) \vee (A \wedge \neg B \wedge \neg C)$$

ein Modell für F

$$F_{CNF} = (A \vee \neg B \vee C) \wedge (A \vee \neg B \vee \neg C) \wedge (\neg A \vee B \vee \neg C) \wedge (\neg A \vee \neg B \vee C) \wedge (\neg A \vee \neg B \vee \neg C)$$

A	B	C	G	H	I	F
0	0	0	1	1	0	1
0	0	1	1	1	0	1
0	1	0	0	1	0	0
0	1	1	0	1	0	0
1	0	0	0	0	1	1
1	0	1	0	0	0	0
1	1	0	0	1	0	0
1	1	1	0	1	0	0



Prädikatenlogik

Passende Interpretation beinhaltet:

- $U \neq \emptyset$ Universum
- ϕ weist jedem Funktionssymbol (f, g) eine konkrete Funktion zu
- ψ weist jedem Prädikatsymbol (P, Q) ein konkretes Prädikat zu
- ξ weist jeder freien Variable einen konkreten Wert aus U zu

Aufg. Finde alle freien Symbole in $(\forall x P(x)) \wedge (\exists y (Q(f(x), y), y))$

Freie Symbole beinhalten ausser freien Var. auch alle Funktionen und Prädikatsymbole.

Aufg. Finde ein Modell für $\forall x P(f(x), y)$

Freie Var., gebundene Var., Funktionen, Prädikate

z.B. Wir definieren die Interpretation A wie folgt:

$$U^A = \mathbb{N}, \quad P^A(x, y) = 1 \text{ g.d.w. } y < x \text{ für alle } x, y \in U^A, \quad y^A = 0, \\ f^A(x) = x + 1 \text{ für alle } x \in U^A$$

Aufg. $F = \exists z \forall y ((P(x, y) \rightarrow \neg P(f(x), z)) \vee Q(z, y))$

Freie Var., gebundene Var., Funktionen, Prädikate

Gib eine Interpretation A an, die ist...

1.) nicht passend für F

z.B. $U^A = \{0, 1\}$, $\leftarrow U$ unter Interpretation A
Rest nicht definiert

2.) passend und Modell für F

z.B. $U^A = \{0, 1\}$, $Q^A(z, y) = 1$ für alle $z, y \in U^A$, $P^A(x, y) = 0$ für alle $x, y \in U^A$
 $f^A(x) = x$ für alle $x \in U^A$ und $x^A = 0$

(es gilt $A(Q(z, y)) = 1$ für alle $z, y \in A$, also auch $A(F) = 1$)

3.) passend und kein Modell für F

z.B. $U = \{0, 1\}$, $Q^A(z, y) = 0$ für alle $z, y \in U^A$, $P^A(x, y) = 1$ für alle $x, y \in U^A$
 $x^A = 0$, $f^A(x) = x$ ($A(\neg P(f(x), y)) = 0$ für alle $x, y \in U^A$)

Def. $F \models G$ genau dann wenn jede für F und G passende Interpretation A gilt, wenn $A \models F$, dann $A \models G$

Def. $F \equiv G$ genau dann wenn für alle für F und G passenden Interpret. A gilt $A(F) = 1$ genau dann wenn $A(G) = 1$

Aufg. Sind $\forall x F$ und $\forall y F$ äquivalent für jede beliebige Formel?

Falsch. Gegenbsp.: $F = P(x)$. Sei A eine Interpretation so dass $U^A = \{0, 1\}$,
 $x^A = 0$ und $P^A(x) = 1$ g.d.w. $x = 0$. Dann ist $A(\forall x F) = 0$, aber $A(\forall y F) = 1$

$\nearrow$ gehört nicht zur Interpretation

A ist Modell für $\forall y F$, aber nicht für $\forall x F$, also sind beide Formeln nicht äquivalent.

Def. 6.16. und Def. 6.36.

$A(F \wedge G) = 1$ if and only if $A(F) = 1$ and $A(G) = 1$

$A(F \vee G) = 1$ if and only if $A(F) = 1$ or $A(G) = 1$

$A(\neg F) = 1$ if and only if $A(F) = 0$

$A(\forall x F) = 1$ if and only if $A_{[x \rightarrow u]}(F) = 1$ for all $u \in U$

$A(\exists x F) = 1$ if and only if $A_{[x \rightarrow u]}(F) = 1$ for some $u \in U$

Bmk. $A_{[x \rightarrow u]}$ für $u \in U$ ist die gleiche Interpretation wie A mit der Ausnahme dass sie x auf den Wert u setzt

Bsp. Sei $F = \forall x P(x)$, $U^A = \{1, 2\}$, $P^A(x) = 1$ g.d.W. $x = 2$

Dann ist $A_{[x \rightarrow 1]}(P(x)) = 0$ und $A_{[x \rightarrow 2]}(P(x)) = 1$, also folgt $A(\forall x (P(x))) = 0$

Aufg. Beweise $\overbrace{\forall x (F \wedge G)}^H \models \overbrace{\exists x F}^I$ für alle Formeln F, G

Sei A eine beliebige Interpretation, die passend ist für H und I und Model ist für H .

$$A(\forall x (F \wedge G)) = 1$$

$$\Rightarrow A_{[x \rightarrow u]}(F \wedge G) = 1 \quad \text{für alle } u \in U^A \quad (\text{sem. } \forall)$$

$$\Rightarrow A_{[x \rightarrow u^*]}(F \wedge G) = 1 \quad \text{für ein } u^* \in U^A \quad (U^A \neq \emptyset)$$

$$\Rightarrow A_{[x \rightarrow u^*]}(F) = 1 \text{ und } A_{[x \rightarrow u^*]}(G) = 1 \quad \text{für ein } u^* \in U^A \quad (\text{sem. } \wedge)$$

$$\Rightarrow A_{[x \rightarrow u^*]}(F) = 1 \quad \text{für ein } u^* \in U^A$$

$$\Rightarrow A(\exists x F) = 1 \quad (\text{sem. } \exists)$$

Aufg.

Gilt $\underbrace{(\exists x F \wedge \exists y G)}_H \models \underbrace{F \wedge G}_K$ für alle beliebigen Formeln F, G ?

Nein. Wir machen einen Beweis via Gegenbeispiel. Müssen Interpretation angeben, die passend ist für H und K , Model ist für H , aber kein Model ist für K .

Alles definieren!

Wir wählen $F = P(x)$, $G = P(y)$ und eine Interpretation A mit $U^A = \{0, 1\}$, $P^A(x) = 1$ g.d.w. $x = 1$, $x^A = 0$, $y^A = 0$

1. F und G mit konkreten Formeln instanziiieren

2. Passende Interpretation angeben

Begründen!

Wir haben $A_{(x \mapsto 1)}(P(x)) = 1$

$$\Rightarrow A(\exists x P(x)) = 1 \quad (\text{sem. of } \exists)$$

Analog folgt $A(\exists y P(y)) = 1$

$$\Rightarrow A(\exists x P(x) \wedge \exists y P(y)) = 1 \quad (\text{sem. of } \wedge)$$

Es gilt aber $A(P(y)) = 0$ und $A(P(x)) = 0$

$$\Rightarrow A(P(y) \wedge P(y)) = 0 \quad (\text{sem. of } \wedge)$$

Aufg. Beweise $\forall x(F \rightarrow G) \models (\forall x F) \rightarrow (\forall x G)$

Sei $\mathcal{A}$ eine beliebige Interpretation passend für $\forall x(F \rightarrow G)$ und $(\forall x F) \rightarrow (\forall x G)$. Nehmen wir an $\mathcal{A}(\forall x(F \rightarrow G)) = 1$.

• Fall $\mathcal{A}(\forall x F) = 0$

Dann $\mathcal{A}(\neg(\forall x F)) = 1$ (def. 6.16)

• Fall $\mathcal{A}(\forall x F) = 1$. Sei $u \in \mathcal{U}^{\mathcal{A}}$ bel. und fix. Es gilt $\mathcal{A}_{[x \rightarrow u]}(F) = 1$

Zudem gilt $\mathcal{A}(\forall x(F \rightarrow G)) = 1$

$\Rightarrow \mathcal{A}(\forall x(\neg F \vee G)) = 1$ (def. $\rightarrow$)

$\Rightarrow \mathcal{A}_{[x \rightarrow u]}(\neg F \vee G) = 1$ für alle $u \in \mathcal{U}^{\mathcal{A}}$ (def. 6.36.)

$\Rightarrow \mathcal{A}_{[x \rightarrow u]}(\neg F \vee G) = 1$ ($u \in \mathcal{U}^{\mathcal{A}}$)

$\Rightarrow \mathcal{A}_{[x \rightarrow u]}(\neg F) = 1$ oder $\mathcal{A}_{[x \rightarrow u]}(G) = 1$ (def. 6.16.)

$\Rightarrow \mathcal{A}_{[x \rightarrow u]}(F) = 0$ oder $\mathcal{A}_{[x \rightarrow u]}(G) = 1$ (def. 6.16.)

$\Rightarrow \mathcal{A}_{[x \rightarrow u]}(G) = 1$ ($\mathcal{A}_{[x \rightarrow u]}(F) = 1$)

Da u beliebig war erhalten wir $\mathcal{A}(\forall x G) = 1$

Verbinden wir beide Fälle, so erhalten wir

$\mathcal{A}(\neg(\forall x F)) = 1$ oder $\mathcal{A}(\forall x G) = 1$

$\Rightarrow \mathcal{A}(\neg(\forall x F) \vee (\forall x G)) = 1$ (sem. von $\vee$)

$\Rightarrow \mathcal{A}((\forall x F) \rightarrow (\forall x G)) = 1$ (def. $\rightarrow$)

Also gilt $\forall x(F \rightarrow G) \models (\forall x F) \rightarrow (\forall x G)$