

Übung 5

Nachbesprechung

- Mengen sind keine Aussagen, können nicht wahr oder falsch sein!
also nie $A \Leftrightarrow \dots$ schreiben für Menge A
 $x \in A$ ist aber eine Aussage
- $x \in A$ ist nie eine Tautologie! Wenn ihr $x \in A$ annimmt, dann ist $x \in A$ wahr, aber keine Tautologie, da es Interpretationen gibt unter denen $x \in A$ falsch ist
- $x \in A$ kann nicht wie eine atomare Formel behandelt werden, da es eine Formel in der Prädikatenlogik ist und nicht der Aussagenlogik
- Nehmt nie Sachen an über einen neuen Operator (z.B. $A \Delta B = B \Delta A$) ohne Beweis.
- $A = B \Rightarrow A \cup C = B \cup C$, aber $A \neq B \not\Rightarrow A \cup C = B \cup C$

Relationen

Relationen sind Mengen, jedes Element ist ein Tupel

Eine Relation $\mathcal{R} \subseteq A \times B$ beschreibt die Beziehungen zwischen Elementen aus A und B .

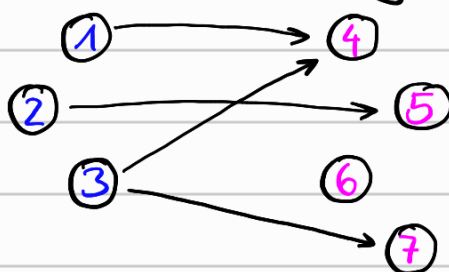
$(i, j) \in \mathcal{R}$ heisst i steht in Relation $\mathcal{R}$ zu j , äquiv. Schreibweise $i \mathcal{R} j$

Bsp. $\mathcal{R} = \{(1, 4), (3, 7), (2, 5), (3, 4)\} \subseteq \{1, 2, 3\} \times \{4, 5, 6, 7\} = A \times B$

Matrixdarstellung

$$\begin{matrix} & \begin{matrix} 4 & 5 & 6 & 7 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix} \quad M_{ij} = 1 \Leftrightarrow (i, j) \in \mathcal{R}$$

Graphdarstellung



gerichtete Pfeile, da
Tupel geordnet sind

Spezielle Relationen $\mathcal{R} \subseteq A \times B$

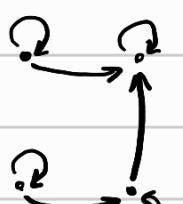
- $\mathcal{R} = \emptyset$ Nullmatrix
- $\mathcal{R} = A \times B$ Alle Einträge 1
- $\mathcal{R} = \text{id}_A = \{(a, a) \mid a \in A\}$ wenn $A = B$ Identitätsmatrix

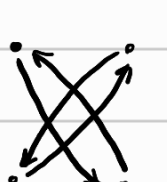
Spezielle Eigenschaften einer Relation $\mathcal{R} \subseteq A \times A$ (auf A)

- Reflexiv: für alle $a \in A$ $a \mathcal{R} a$
in Matrix überall 1 auf der Diagonalen, im Graphen hat jeder Knoten eine Schlinge zu sich, z.B. $\leq, =$
- Irreflexiv: für alle $a \in A$ $a \not\mathcal{R} a$ $\neq$ nicht reflexiv
in Matrix überall 0 auf der Diagonalen, im Graphen hat kein Knoten Schlinge
- Symmetrisch: $a \mathcal{R} b \Leftrightarrow b \mathcal{R} a$ für alle $a, b \in A$
Matrix symmetrisch $M^T = M$, nie $\rightarrow$, immer $\leftrightarrow$ oder $\cdot \cdot$, z.B. $\equiv_2$
- Antisymmetrisch: $(a \mathcal{R} b \wedge b \mathcal{R} a) \Rightarrow a = b$ für alle $a, b \in A$ $\neq$ nicht symm.
 $M_{ij} = 1 \Rightarrow M_{ji} = 0$, nie $\leftrightarrow$, z.B. $\leq$
- Transitiv: $(a \mathcal{R} b \wedge b \mathcal{R} c) \Rightarrow a \mathcal{R} c$ für alle $a, b, c \in A$, z.B. $\leq$


Aufg. Welche Eigenschaften erfüllen folgende Relationen?

-  reflexiv ✓ irreflexiv ✗
symmetrisch ✓ antisymmetrisch ✓
transitiv ✓

-  reflexiv ✓ irreflexiv ✗
symmetrisch ✗ antisymmetrisch ✓
transitiv ✗

-  reflexiv ✗ irreflexiv ✓
symmetrisch ✓ antisymmetrisch ✗
transitiv ✗

Beweismuster

Reflexivity of $\rho \subseteq A \times A$

Let $a \in A$ be arbitrary.

[Show that $a \rho a$ holds]

oder: $\text{id} \subseteq \rho$

Irreflexivity of $\rho \subseteq A \times A$

Let $a \in A$ be arbitrary.

[Show that $a \rho a$ does not hold]

oder: $\rho \cap \text{id} = \emptyset$

Symmetry of $\rho \subseteq A \times A$

Let $a, b \in A$ be arbitrary.

$a \rho b$

$\Rightarrow \dots$ (justification)

$\Rightarrow b \rho a$

From that follows ...

oder: $\rho = \hat{\rho}$

Antisymmetry of $\rho \subseteq A \times A$

Let $a, b \in A$ be arbitrary.

$a \rho b \wedge b \rho a$

$\Rightarrow \dots$ (justification)

$\Rightarrow a = b$

From that follows ...

oder: $\rho \cap \hat{\rho} \subseteq \text{id}$

Transitivity of $\rho \subseteq A \times A$

Let $a, b, c \in A$ be arbitrary

$a \rho b \wedge b \rho c$

$\Rightarrow \dots$ (justification)

$\Rightarrow a \rho c$

From that follows ...

oder: $\rho^2 \subseteq \rho$

Aufg. Gibt es eine Relation ρ auf $A \neq \emptyset$, also $\rho \subseteq A \times A$, die reflexiv und irreflexiv ist?

Nein. $a \rho a$ und $a \not\rho a$ kann nicht gleichzeitig wahr sein für $a \in A$.

Wenn $A = \emptyset$, dann ist $\rho = \emptyset$ refl. und irrefl.

Aufg. Die Vereinigung zweier transitiven Relationen ist auch transitiv.

Falsch. Sei $A = \{1, 2, 3\}$, $\rho = \{(1, 2)\}$, $\sigma = \{(2, 3)\}$, beide sind transitiv. Aber $\rho \cup \sigma = \{(1, 2), (2, 3)\}$ ist nicht transitiv, da $(1, 2) \in \rho \cup \sigma$ und $(2, 3) \in \rho \cup \sigma$, aber $(1, 3) \notin \rho \cup \sigma$.

Aufg. Wie viele Relationen gibt es auf A , wobei $|A| = n$.
Matrix hat n^2 viele Einträge, jeder kann zwei Werte annehmen

$$\underbrace{2 \cdot \dots \cdot 2}_{n^2 \text{ Mal}} = 2^{n^2} = |P(A \times A)|$$

$$\begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & \dots & n \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ \vdots \\ n \end{matrix} & \begin{bmatrix} * & * & * & * \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ * & * & * & * \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Aufg. Wie viele irreflexive Relationen gibt es auf $\{1, 2, 3\}$?

Alle Relationen kann man als Matrix darstellen

Diagonale muss 0 sein bei irreflexiven Rel.

Die 6 restlichen Einträge können beliebig sein und 2 Werte (0 oder 1) annehmen

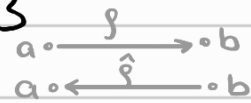
$$\begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & * & * \\ * & 0 & * \\ * & * & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$2 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2 = 2^6 = 64$$

Für Relationen $\vartheta \subseteq A \times B$, $\delta \subseteq B \times C$

- Inverse $\hat{\vartheta}: a \vartheta b \Leftrightarrow b \hat{\vartheta} a$ für alle $a \in A, b \in B$

Matrix transponieren, Kanten im Graph umdrehen



- Komposition $\vartheta \circ \delta: a \vartheta \circ \delta c \Leftrightarrow \exists b (a \vartheta b \wedge b \delta c)$

$\vartheta \subseteq A \times B$ und $\delta \subseteq B \times C$ $a \xrightarrow{\vartheta} b \xrightarrow{\delta} c$ $a \xrightarrow{\vartheta \circ \delta} c$

Für Relation $\vartheta \subseteq A \times A$

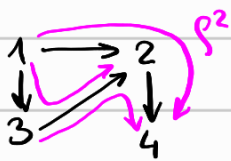
ϑ^2 : entspricht $\vartheta \circ \vartheta$, Komposition mit sich selbst

Im Graphen entspricht ϑ^2 Wege der Länge 2

$\vartheta^*: (a, b) \in \vartheta \Leftrightarrow \exists x_1 \dots \exists x_n ((a, x_1) \in \vartheta \wedge (x_1, x_2) \in \vartheta \wedge \dots \wedge (x_n, b) \in \vartheta)$

b ist erreichbar von a aus in endlich vielen (>0) Schritten (Graph)

z.B. $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $\vartheta = \{(1, 3), (1, 2), (3, 2), (2, 4)\}$



$\vartheta^2 = \{(1, 4), (1, 2), (3, 4)\}$

$\vartheta^* = \vartheta \cup \vartheta^2 \cup \vartheta^3 \cup \dots$

Aufg. Ist die Komposition zweier symmetrischen Relationen symm.?

Nein. Sei $A = \{1, 2, 3\}$, $\vartheta = \{(1, 2), (2, 1)\}$ und $\delta = \{(2, 3), (3, 2)\}$ sind symmetrisch, aber $\vartheta \circ \delta = \{(1, 3)\}$ ist es nicht, da $(3, 1) \notin \vartheta \circ \delta$.

Aufg. Beweise $\hat{\vartheta \circ \delta} = \hat{\delta} \circ \hat{\vartheta}$ für alle Relationen $\vartheta \subseteq A \times B$, $\delta \subseteq B \times C$

Mengenbeweis: zu zeigen $(a, c) \in \hat{\vartheta \circ \delta} \Leftrightarrow (a, c) \in \hat{\delta} \circ \hat{\vartheta}$

Seien a, c beliebig

$(a, c) \in \hat{\vartheta \circ \delta}$

$\Leftrightarrow (c, a) \in \vartheta \circ \delta$

$\Leftrightarrow (c, b) \in \vartheta \wedge (b, a) \in \delta$ für ein $b \in B$ (def. $\circ$)

$\Leftrightarrow (b, c) \in \hat{\vartheta} \wedge (a, b) \in \hat{\delta}$ für ein $b \in B$ (def. $\wedge$)

$\Leftrightarrow (a, b) \in \hat{\delta} \wedge (b, c) \in \hat{\vartheta}$ für ein $b \in B$ (comm.)

$\Leftrightarrow (a, c) \in \hat{\delta} \circ \hat{\vartheta}$ (def. $\circ$)

Aufg. Let δ and γ be transitive relations on a non-empty set A , such that $\delta \circ \gamma \subseteq \gamma \circ \delta$. Prove that $\gamma \circ \delta$ is transitive. (*)

Proof: Assume $\delta \circ \gamma \subseteq \gamma \circ \delta$ and δ, γ are transitive.

Let $a, b, c \in A$ be arbitrary and assume $a \gamma \delta b$, $b \gamma \delta c$.

want to show $a \gamma \delta c$, $(a \gamma \delta b \wedge b \gamma \delta c \Rightarrow a \gamma \delta c)$

$$(a, b) \in \gamma \circ \delta \wedge (b, c) \in \gamma \circ \delta$$

$$\Rightarrow (a, x) \in \gamma \wedge (x, b) \in \delta \wedge (b, c) \in \gamma \circ \delta \text{ for some } x \in A \text{ (def. } \circ \text{)}$$

$$\Rightarrow (a, x) \in \gamma \wedge (x, b) \in \delta \wedge (b, y) \in \gamma \wedge (y, c) \in \delta \text{ for some } x, y \in A \text{ (def. } \circ \text{)}$$

$$\Rightarrow (a, x) \in \gamma \wedge (x, y) \in \delta \circ \gamma \wedge (y, c) \in \delta \text{ for some } x, y \in A \text{ (def. } \circ \text{)}$$

$$\Rightarrow (a, x) \in \gamma \wedge (x, y) \in \gamma \circ \delta \wedge (y, c) \in \delta \text{ for some } x, y \in A \text{ (} \delta \circ \gamma \subseteq \gamma \circ \delta \text{)}$$

$$\Rightarrow (a, x) \in \gamma \wedge (x, z) \in \gamma \wedge (z, y) \in \delta \wedge (y, c) \in \delta \text{ for some } x, y, z \in A \text{ (def. } \circ \text{)}$$

$$\Rightarrow (a, z) \in \gamma \wedge (z, y) \in \delta \wedge (y, c) \in \delta \text{ for some } z, y \in A \text{ (} \gamma \text{ transitive)}$$

$$\Rightarrow (a, z) \in \gamma \wedge (z, c) \in \delta \text{ for some } z \in A \text{ (} \delta \text{ transitive)}$$

$$\Rightarrow (a, c) \in \gamma \circ \delta \text{ (def. } \circ \text{)}$$

Equivalence relation

$\theta \subseteq A \times A$, ist

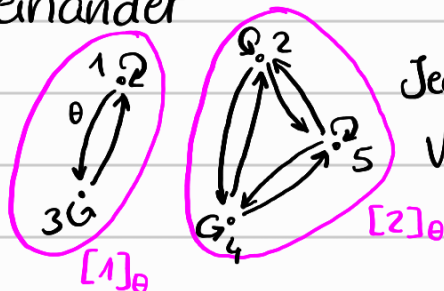
- reflexiv
- symmetrisch
- transitiv

} alle drei Eigenschaften beweisen, um zu beweisen, dass θ eine Äquiv.rel. auf A ist

Äquivalenzklasse $[a]_\theta$: Teilmenge $[a]_\theta \subseteq A$, alle Elemente in $[a]_\theta$ sind in Relation zueinander

z.B. $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

θ wie im Graph



Jede Äquiv.klasse ist ein Vollständiger Graph

$$A/\theta = \{[1]_\theta, [2]_\theta\} = \{\{1, 3\}, \{2, 4, 5\}\}$$

$B \neq C$

Thm 3.9. A/θ ist eine Partition von A ($\bigcup_{B \in A/\theta} B = A$ und $B \cap C = \emptyset$ für $B, C \in A/\theta$)

Partial order relation

$\leq \subseteq A \times A$, ist

- reflexiv
 - antisymmetrisch
 - transitiv
- alle drei Eigenschaften beweisen, um zu beweisen, dass $\leq$ eine partielle Ordnungsrel. auf A ist

z.B. $\leq, \geq, |$ auf $\mathbb{R}$, $\subseteq$ auf $\mathcal{P}(B)$ für eine Menge B

$\leq$ mit einer Menge A zusammen $(A; \leq)$ wird poset genannt

Aufg. Show that if $(A; \leq)$ is a poset, then $(A; \hat{\leq})$ is a poset.

To prove this show that $\hat{\leq}$ is a partial order relation

Reflexivity: For any $a \in A$, we have $a \leq a$ by refl. of $\leq$. Thus $a \hat{\leq} a$ by the def. of inverse

Antisymmetry: Let $a, b \in A$ be arbitrary s.t. $a \hat{\leq} b$ and $b \hat{\leq} a$. Then $b \leq a$ and $a \leq b$ by def. of inverse and $a = b$, since $\leq$ is antisymmetric

Transitivity: Let $a, b, c \in A$ be arbitrary s.t. $a \hat{\leq} b$ and $b \hat{\leq} c$. By def. of inv. this means that $b \leq a$ and $c \leq b$. By transitivity of $\leq$ we have $c \leq a$. Hence $a \hat{\leq} c$.

(*) Proof 2:

$$\begin{aligned} (\varphi \circ \phi)^2 &= (\varphi \circ \phi) \circ (\varphi \circ \phi) \\ &= \varphi \circ (\phi \circ \varphi) \circ \phi && \text{(associativity of } \circ \text{)} \\ &\leq \varphi \circ (\varphi \circ \phi) \circ \phi && \text{(assumption } \phi \circ \varphi \subseteq \varphi \circ \phi \text{)} \\ &= \varphi^2 \circ \phi^2 && \text{(associativity of } \circ \text{)} \\ &\subseteq \varphi \circ \phi && \text{(transitivity of } \varphi \text{ and } \phi \text{)} \end{aligned}$$

From $(\varphi \circ \phi)^2 \subseteq \varphi \circ \phi$ follows that $\varphi \circ \phi$ is transitive