

Übung 6

Nachbesprechung

- Begründet immer eure Schritte klar. Wenn ihr eine Eigenschaft von δ verwendet, dann schreibt hin welche!
- $a \rho b$ und $(a,b) \in \rho$ bedeuten genau das gleiche
- Bei einem Gegenbeispiel müsst ihr alles definieren
"Für alle A und π, δ auf A ": definiert A, π, δ und nicht $\hat{\pi}$
- Wenn ihr eine Aussage von der Form "Für alle $a, b \in A \dots$ " beweist, dann startet euren Beweis immer mit "Seien $a, b \in A$ beliebig" (Let $a, b \in A$ be arbitrary)

Partial order relation

Für poset $(A; \leq)$

$a, b \in A$ sind vergleichbar wenn $a \leq b$ oder $b \leq a$
z.B. auf $(\mathbb{N}_{>0}; |)$ sind 2 und 5 nicht vergl.

$\leq \subseteq A \times A$, ist

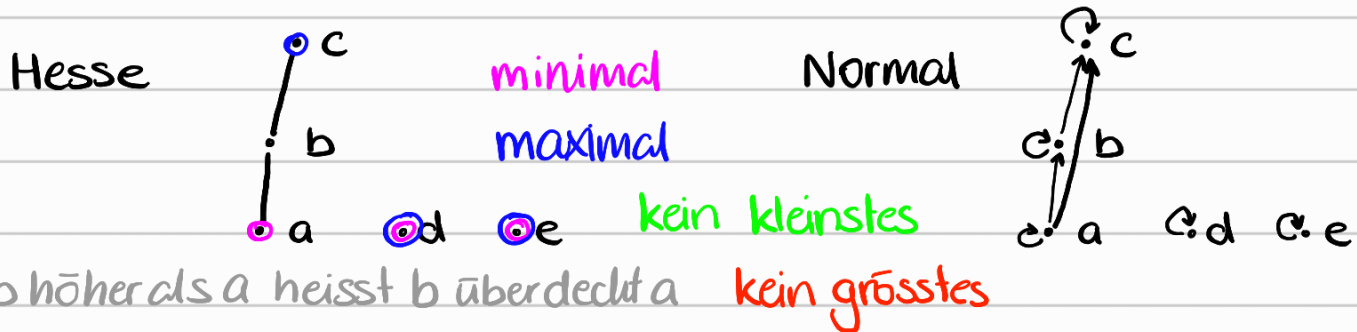
- reflexiv
- antisymmetrisch
- transitiv

$(A; \leq)$ ist total geordnet, wenn alle Elemente aus A vergleichbar sind
z.B. $(\mathbb{N}; \leq)$ aber nicht $(\mathbb{N}; |)$

b überdeckt a , wenn es kein $c \in A$ gibt, sodass $a < c$ und $c < b$
z.B. in $(\mathbb{N}; \leq)$ 2 überdeckt 1, aber nicht 0

Hesse Diagram für $p.o.r. \leq$

- Schlingen auslassen ($\leq$ ist refl.)
- Kante zwischen a und b genau dann wenn b a überdeckt (transitive Kanten auslassen)



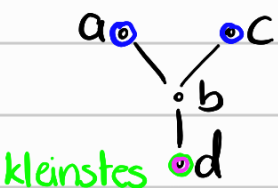
$a \in A$ minimal:

- nichts darunter, es gibt kein b, welches von a überdeckt wird
- alle Freistehenden (not comparable)
- kann mehrere geben, immer vorhanden

$a \in A$ least / kleinste:

- eindeutig, evtl. nicht vorhanden
- mit allen verbunden im Graph
- darf keine Freistehenden geben im Graph

Aufg. Das Poset $(\{a, b, c, d\}; \leq)$ hat folgendes Hessediagramm:



kleinstes
kein grösstes

Was ist die Matrixdarstellung von $\leq$?

d least elem. $\rightarrow$

1	0	0	0
1	1	1	0
0	0	1	0
1	1	1	1

$\leftarrow a, c$ maximal

Funktionen

Relationen, mit zusätzlichen Beschränkungen

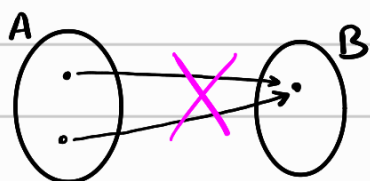
$f: A \rightarrow B$, A ist der Definitionsbereich, B der Bildbereich

Elemente $a \in A$ abgebildet auf $f(a) \in B$

B^A ist die Menge aller Funktionen von A nach B

Eigenschaften einer Funktion $f: A \rightarrow B$

- **Injektivität**: für alle $b_1, b_2 \in B$ gilt $b_1 \neq b_2 \Rightarrow f(b_1) \neq f(b_2)$
bzw. $f(b_1) = f(b_2) \Rightarrow b_1 = b_2$ (indirekte Beweisart)



Nie zwei Elemente auf gleiches abgebildet

z.B. $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, f(x) = 2x$ ist injektiv, aber $g: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}, g(x) = |x|$ nicht.

Zeigen, dass f injektiv ist: Seien $x, y \in \mathbb{N}$ beliebig und nehmen wir an $x \neq y$. Dann gilt auch $f(x) = 2x \neq 2y = f(y)$. Somit folgt, dass f inj. ist.

- **Surjektivität**: Für alle $b \in B$ existiert ein $a \in A$, so dass $b = f(a)$

Intuitiv: In jedem Element in B endet ein Pfeil aus A

z.B. $g: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}, g(x) = |x|$ ist surjektiv, aber $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, f(x) = 2x$ nicht

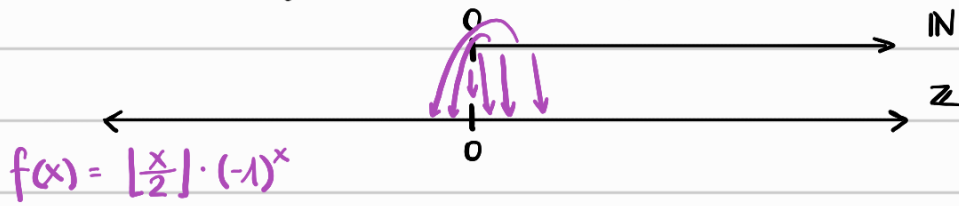
- f ist bijektiv $\Leftrightarrow f$ ist surjektiv und injektiv

Sei $f: A \rightarrow B$ surj., dann gilt $|A| \geq |B|$
Sei $f: A \rightarrow B$ inj., dann gilt, $|A| \leq |B|$

} Für A, B endlich?

Wenn $f: A \rightarrow B$ und $|A| = |B| = n$ (Mengen gleich gross und endlich), dann gilt
 f ist bijektiv $\Leftrightarrow f$ ist surjektiv $\Leftrightarrow f$ ist injektiv

Aufg. Find a surjective function $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$. No justification required.



$f(0) = 0 \quad f(1) = 0 \quad f(2) = 1 \quad f(3) = -1 \quad f(4) = 2 \quad \dots$
f muss nicht inj. sein

Countability

$\preceq$ Relation zwischen Mengen. $\preceq$ ist transitiv

$A \preceq B$ gilt, wenn eine injektive Funktion $f: A \rightarrow B$ existiert.

$A \sim B$, wenn f bijektiv ist: A und B sind gleich mächtig

- endliche Mengen z.B. $\{0,1\}$
- abzählbar unendliche Mengen, def. $A \preceq \mathbb{N}$ z.B. $\mathbb{N}, \{0,1\}^*, \mathbb{N} \times \mathbb{N}$
- überabzählbare Mengen z.B. $\{0,1\}^\infty, [0,1]$
↑
jedes Element ist unendlich lang

Beweise, dass S abzählbar ist: $S \leq A$

- finde injektive Funktion $f: S \rightarrow A$, wobei A abzählbar ist
z.B. $A = \mathbb{N}$, $A = \{0, 1\}^*$, $A = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, $A = \mathbb{N}^*$ (Thm., Lemmas aus Skript)
- beweise, dass f injektiv ist ^{endlich lange Bitstrings}
 $\Rightarrow S$ hat höchstens gleich viele Elemente wie A
- zeige, dass wirklich $f(s) \in A$ gilt für alle $s \in S$

Beweise, dass S überabzählbar ist: $B \leq S$

- finde injektive Funktion $f: B \rightarrow S$, wobei B überabzählbar ist
z.B. $B = \mathbb{N}^\infty$, $B = \{0, 1\}^\infty$, $B = \{0, 1, 2\}^\infty$, $B = \mathbb{N}^\mathbb{N}$ (Thm., Lemmas aus Skript)
- beweise, dass f injektiv ist
 $\Rightarrow B$ hat höchstens gleich viele Elemente wie S
- zeige, dass wirklich $f(b) \in S$ gilt für alle $b \in B$

Beweise, dass $A \sim B$ gilt:

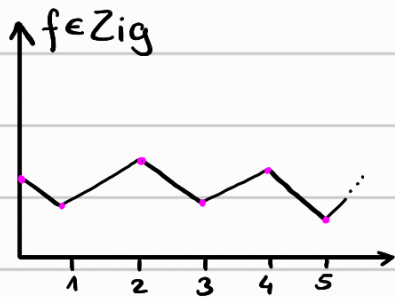
- finde bijektive Funktion $f: A \rightarrow B$
- beweise, dass f bijektiv ist
- beweise, dass f surjektiv ist und für alle $a \in A$ gilt $f(a) \in B$

Aufg. Zigzag function $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ if for all $n > 0$ we have:

if $f(n-1) < f(n)$, then $f(n) > f(n+1)$ and if $f(n-1) > f(n)$, then $f(n) < f(n+1)$

Is the set of all zigzag functions countable?

$$\text{Zig} \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$$



Zig ist überabzählbar

Ziel: Injektive Funktion $g: \{0,1\}^{\infty} \rightarrow \text{Zig}$ finden

↑ bitstrings ↑ Funktionen

$b \in \{0,1\}^{\infty}$ ist ein unendlich langer, semi-infinite Bitstring. Das heißt b hat ein "erstes" Element. Also kann man b durchnummerieren.

$b = b_0 b_1 b_2 \dots$ (unendlich lang), wobei $b_i \in \{0,1\}$

g bildet jeden Bitstring auf eine Funktion, die die Zig Eigenschaft erfüllt, ab. Wir schreiben $f_b := g(b)$

Sei $b \in \{0,1\}^{\infty}$ beliebig. Wir definieren $f_b: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ wie folgt:

$$f_b(i) = \begin{cases} 0 & \text{wenn } i=2k \\ 1+b_k & \text{wenn } i=2k+1 \end{cases} \quad \text{für alle } i \in \mathbb{N}$$

Beweisen, dass g injektiv ist

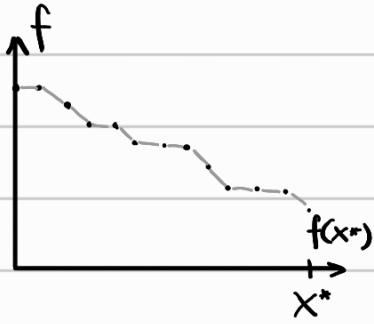
Seien $b, c \in \{0,1\}^{\infty}$ beliebig und nehmen wir an $b \neq c$. Daraus folgt $b_i \neq c_i$ für ein $i \in \mathbb{N}$. Sei i das kleinste solche $i \in \mathbb{N}$. Es gilt $f_b(2i+1) = 1+b_i \neq 1+c_i = f_c(2i+1) \Rightarrow g(b) = f_b \neq f_c = g(c)$

Beweisen, dass $g(b) \in \text{Zig}$ für alle $b \in \{0,1\}^{\infty}$

Für $i = 2k+1$ gilt $f_b(i) = 1+b_k > 0 = f_b(i+1) < 1+b_{k+1} = f_b(i+2)$

Für $i = 2k$ gilt...

Aufg. Prove or disprove $S = \{f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \mid \forall x \forall y (x \leq y \rightarrow f(x) \geq f(y))\}$ is countable.



S ist abzählbar

Da $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ (0 ist kleinste Zahl) können Funktionen irgendwann nicht mehr fallen

Also existiert für alle $f \in S$ ein $x^* \in \mathbb{N}$

so dass $f(y) = f(x^*)$ für alle $y \geq x^*$ (*)

Thm 3.20.iii. A countable $\Rightarrow A^*$ countable, also ist $\mathbb{N}^*$ abzählbar.

Ziel: Injektive Funktion $g: S \rightarrow \mathbb{N}^*$ finden

Sei $f \in S$ beliebig. Wir definieren $g(f) = (f(0), f(1), \dots, f(x^*))$, wobei $f(y) = f(x^*)$ für alle $y \geq x^*$.

Beweisen, dass g injektiv ist

Seien $f_1, f_2 \in S$ beliebig und $x_1^*, x_2^* \in \mathbb{N}$ der kleinste Index, so dass $f_1(x_1) = f_1(x_1^*)$ und $f_2(x_2) = f_2(x_2^*)$ für alle $x_1 \geq x_1^*$ und $x_2 \geq x_2^*$.

Nehmen wir an $f_1 \neq f_2$. Also existiert ein x , so dass $f_1(x) \neq f_2(x)$.

Sei x das kleinste solche x . Es gilt $x \leq x_1^*$ oder $x \leq x_2^*$.

Nehmen wir o.B.d.A. an, dass $x \leq x_1^*$ gilt.

Fall 1, $x > x_2^*$: $g(f_1)$ und $g(f_2)$ haben unterschiedliche Länge

Fall 2, $x \leq x_2^*$: $g(f_1)$ und $g(f_2)$ unterscheiden sich an der Stelle x

In beiden Fällen gilt $f_1 \neq f_2 \Rightarrow g(f_1) \neq g(f_2)$

(kurzer Beweis, dass $g(f) \in \mathbb{N}^*$ für alle $f \in S$)

verwendet Argumentation von oben (*)