ETH Zürich, D-INFK — Linear Algebra, Part I — HS 2025

Stanislav Kostov

(*NOT OFFICIAL MATERIAL)

(**NO RIGHTS TO EXERCISES RESERVED)

Mock Exam

Platz Nr.		Note
Leginummer		
Datum	30.10.2025, 08:15-10:00	

Aufgabe	1	2	3	4	5		Total
Max. Punkte	18	16	18	24	24		100
Punkte							

- Bitte füllen Sie zuerst das Deckblatt mit der Leginummer aus. Die Platznummer finden Sie auf Ihrem Tisch. Legen Sie Ihre Legi gut sichtbar hin.
- **Öffnen Sie den Prüfungsbogen erst wenn Sie dazu aufgefordert werden!** Die Prüfungszeit beginnt für alle Teilnehmenden gleichzeitig. Die Prüfungsdauer beträgt **180 Minuten**.
- Schalten Sie Ihr Mobiltelefon aus. Mit Ausnahme von Uhren (keine Smartwatches) sind keine elektronischen Geräte auf den Tischen erlaubt.
- Diese Prüfung umfasst **5 Aufgaben**. Alle Prüfungsseiten sind nummeriert und die Prüfung umfasst insgesamt **16 Seiten**. Die Prüfung ist doppelseitig bedruckt. Bitte schreiben Sie Ihre Lösungen direkt in die Prüfung, nach jeder Aufgabe gibt es genügend freien Platz dafür. Einige Schmierblätter wurden Ihnen schon hingelegt. Falls Sie trotzdem zusätzliche Blätter brauchen, erhalten Sie diese von der Prüfungsaufsicht. Prüfen Sie Ihr Exemplar der Prüfung direkt nach Prüfungsbeginn auf Vollständigkeit!
- Alle Unteraufgaben sind mit einem maximalen Punktewert (in eckiger Box) und einem Multiplikator (in Kreis) versehen. Nehmen wir an, der maximale Punktewert ist $p \in \mathbb{N}$ und der Multiplikator $m \in \mathbb{N}$ (wie hier im Beispiel am rechten Rand). Das bedeutet, dass wir die Unteraufgabe mit einer ganzen Zahl x zwischen 0 und p (inklusive) bewerten. Ihre tatsächliche Endpunktzahl die Sie für die Unteraufgabe erhalten ist aber $x \cdot m$. Inbesondere ist die Unteraufgabe also maximal $p \cdot m$ Punkte wert. $\boxed{\;/p}$ $\cdot m$
- In den letzten 10 Minuten ist das frühzeitige Abgeben nicht mehr möglich.
- Nach Ablauf der Prüfungszeit: Legen Sie Ihren Stift beiseite und bleiben Sie ruhig an Ihrem Platz sitzen, bis Sie dazu aufgefordert werden, den Raum zu verlassen.
- Schreiben Sie Ihre Leginummer auf alle Blätter. Sortieren Sie die Blätter vor der Abgabe.
- Verwenden Sie keinen Bleistift und schreiben Sie nicht in rot oder grün.
- Versuchen Sie den Lösungsweg klar darzustellen, und schreiben Sie deutlich. Nur begründete Resultate werden bewertet, falls nicht anders vermerkt.
- Das vollständige Abgeben aller Lösungsblätter liegt in Ihrer Verantwortung.
- Nicht zu wertende Lösungsversuche durchstreichen, höchstens eine Lösung wird gewertet.
- Hilfsmittel: 6 einseitig oder 3 doppelseitig beschriebene A4 Seiten; kein Taschenrechner. Mit LaTeX oder Ähnlichem erfasste und gedruckte Notizen sind erlaubt. Die Notizen sollten ohne Lupe oder andere Hilfsmittel gut lesbar sein. Ein Wörterbuch (Englisch–Deutsch oder andere Fremdsprache) als Papierbuch ist erlaubt (kein E-Book o.ä.).
- Unehrliches Handeln hat rechtliche Folgen gemäss der Disziplinarordnung der ETH.

1 Calculations I

/18

In this exercise you do **not** need to justify your answers! For each subtask, please submit only your final answer without any intermediate calculations. Simplify the numbers in your results as much as possible (e.g. write 3 instead of $2+1$ and $\frac{2}{3}$ instead of $\frac{4}{6}$).

c) Consider the matrices

$$M = \begin{bmatrix} 2 & x \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \text{ and } N = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$$

with $x \in \mathbb{R}$. Write down the unique value of x such that $MN = NM$.

/1 ·6

b) Write down two vectors $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$ and a scalar $c \in \mathbb{R}$ such that $\mathbf{v} + \mathbf{w} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v} - \mathbf{w} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ c \end{bmatrix}$, and $v_3 - w_3 = 8$.

/1 ·7

c) Consider the vectors $\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ and $\mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ in $\mathbb{R}^3$. The vector $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$ in $\mathbb{R}^3$ satisfies $c_1\mathbf{b}_1 + c_2\mathbf{b}_2 = \mathbf{v}$ for some unique $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Write down the unique values of the two scalars $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

/1 .5

2 Calculations II

/16

In this exercise you do **not** need to justify your answers! For each subtask, please submit only your final answer without any intermediate calculations. Simplify the numbers in your results as much as possible (e.g. write 3 instead of $2+1$ and $\frac{2}{3}$ instead of $\frac{4}{6}$).

a) Let $n \in \mathbb{N}^{+}$. Consider the function $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ defined by

$$f(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}) := \begin{bmatrix} x_1 - x_2 \\ 3x_2 \\ 2x_1 + 2x_2 \end{bmatrix}$$

for all $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$. Write down the unique matrix A that satisfies $A\mathbf{x} = f(\mathbf{x})$ for all $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$.

/1 ·6

b) Let

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ -1 & -4 \end{bmatrix}.$$

Compute

$$\boldsymbol{A}^3 + 3\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{B} + 3\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^2 + \boldsymbol{B}^3.$$

Hint: $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}) = (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{A}$

/1 .10

3 Proofs I

/18

In this exercise you need to **justify** your answers! You are allowed to use results that appear in the typed or handwritten lecture notes by clearly stating what you are using. For example, you could say: “From the lecture we know that the nullspace of a matrix is orthogonal to its row space. Using this, we get...”. All statements that do **not** appear in the typed or handwritten notes need a proof. In particular, statements that appeared on the assignments but not in the typed or handwritten lecture notes need to be reproven if you want to use them.

a) Let $n \in \mathbb{N}^+$ and let $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$ be arbitrary. Prove that

$$\| \mathbf{v} + \mathbf{w} \|^2 + \| \mathbf{v} - \mathbf{w} \|^2 = 2 \left(\| \mathbf{v} \|^2 + \| \mathbf{w} \|^2 \right)$$

by direct computation.

/3 ·1

b) Let $n \in \mathbb{N}^+$ and let

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}, \mathbf{w} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix}$$

be arbitrary vectors in $\mathbb{R}^n$ with non-negative entries, i.e. $v_i \geq 0$ and $w_i \geq 0$ for all $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Define $u_i := \min\{v_i, w_i\}$ for all $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ and consider the vector

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}.$$

Prove that $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} \geq ||\mathbf{u}||^2$.

$\boxed{/3}$ ·2

c) Let $A \in \mathbb{R}^{3\times 4}$ and $B \in \mathbb{R}^{4\times 5}$ be arbitrary. Assume that the column space $\mathbf{C}(B)$ of B is contained in the nullspace $\mathbf{N}(A)$ of A, i.e. $\mathbf{C}(B) \subseteq \mathbf{N}(A)$. Prove that $\text{rank}(A) + \text{rank}(B) \leq 4$.

/3 ·3

4 Proofs II

/24

In this exercise you need to **justify** your answers! You are allowed to use results that appear in the typed or handwritten lecture notes by clearly stating what you are using. For example, you could say: "From the lecture we know that the nullspace of a matrix is orthogonal to its row space. Using this, we get...". All statements that do **not** appear in the typed or handwritten notes need a proof. In particular, statements that appeared on the assignments but not in the typed or handwritten lecture notes need to be reproven if you want to use them.

a) Let $B \in \mathbb{R}^{m \times m}$ satisfy

$$s_i := \sum_{j=1}^{m} |b_{ij}| \; < \; 1 \quad \text{for every } i.$$

Prove that $I - B$ is invertible.

/3 ·3

b) Let $n \in \mathbb{N}^+$ with $n \geq 2$ be arbitrary. Consider the function $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ defined by

$$f(\mathbf{x}) := \sum_{k=1}^{n} (x_k)^k$$

for all $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{bmatrix}^\top \in \mathbb{R}^n$. Is f a linear transformation?

/3 ·2

c) Note that this exercise is intended to be more **challenging** than the others! Let $n \in \mathbb{N}^+$. Let $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ be arbitrary, and let $b_1, b_2, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$ be arbitrary with $b_i > 0$ for all $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Prove that

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^2}{b_i} \geq \frac{(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^2}{b_1 + b_2 + \cdots + b_n}.$$

Hint: Use the Cauchy-Schwarz inequality which says that $\| \mathbf{u} \| \| \mathbf{v} \| \geq |\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}|$ *holds for all* $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$.

/3 ·3

Solution sheet for multiple choice questions

/24

Note: only the solutions you marked here will count.

Question No.	Answer			
	(a)	**(b)**	**(c)**	**(d)**
1	a	b	c	d
2	a	b	c	d
3	a	b	c	d
4	a	b	c	d
5	a	b	c	d
6	a	b	c	d

Circle the correct answer to each question in the table above. Only the answers in the table are considered, all other markings (for example in the text of the multiple choice questions themselves) will be ignored and not considered. **Exactly one** of the four answers to each question is correct. Each question earns 4 points if and only if it is solved correctly (meaning that exactly the correct answer is circled). If your answer to a question is incorrect, you will get 0 points for that question.

5 Multiple choice questions

Note that the difficulty of the multiple choice questions varies despite all of them being worth the same amount of points. Concretely, each of the following 6 multiple choice questions is worth 4 points. Remember to give your answers on the **solution sheet** for multiple choice questions! We will only look at the solution sheet. In particular, anything you write directly into the multiple choice questions here will **not** be considered.

1. Consider an arbitrary matrix $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ satisfying $A\mathbf{u} = A\mathbf{v}$ for two linearly independent vectors $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$. Which of the following statements must be **true**? ***Note: only one answer is correct.***

(a) A has rank 0.

(b) A has rank at least 1.

(c) A has rank at most 2.

(d) A has rank 3.

2. Let $n \in \mathbb{N}^+$. We call a matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ nilpotent if there exists $k \in \mathbb{N}^+$ such that $A^k = 0$. Which of the following statements must be **true**? ***Note: only one answer is correct.***

(a) Every matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ with nullspace $\mathbf{N}(A) \neq \{\mathbf{0}\}$ is nilpotent.

(b) If $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ is nilpotent and $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ is nilpotent, then $A + B$ is nilpotent.

(c) If $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ is nilpotent, then $\text{rank}(A) < n$.

(d) If $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ is nilpotent and $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ is nilpotent, then AB is nilpotent.

3. Let $n \in \mathbb{N}^+$ be arbitrary and fix $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$. Consider the function $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ defined as $f(\mathbf{x}) := \|\, \mathbf{x} - \mathbf{v} \,\|^2 - \mathbf{x}^\top \mathbf{x}$ for all $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Which of the following statements must be **true**? ***Note: only one answer is correct.***

(a) f is a linear transformation if and only if $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$.

(b) f is a linear transformation if and only if $\mathbf{v} = \mathbf{0}$.

(c) f is a linear transformation if and only if $\|\, \mathbf{v} \,\| = 1$.

(d) It is not possible to choose $\mathbf{v}$ such that f is a linear transformation.

4. Let $n, m \in \mathbb{N}^+$ and let $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ be an arbitrary matrix. Which of the following functions is **not** a linear transformation? ***Note: only one answer is correct.***

(a) $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ defined as $f(\mathbf{x}) := 2A\mathbf{x}$ for all $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

(b) $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ defined as $f(\mathbf{x}) := A^2\mathbf{x}$ for all $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

(c) $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ defined as $f(\mathbf{x}) := (A\mathbf{x})^\top (A\mathbf{x})$ for all $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

(d) $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ defined as $f(\mathbf{x}) := \mathbf{1}^\top (A\mathbf{x})$ for all $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, where $\mathbf{1}$ is the all-ones vector in $\mathbb{R}^m$.

5. Let $\boldsymbol{A}$ be an invertible matrix satisfying:

$$\boldsymbol{A}^2 = 3\boldsymbol{A} - \boldsymbol{I}.$$

Which of the following matrices is equal to $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}^{-1}$? ***Note: only one answer is correct.***

(a) $2\boldsymbol{A} - \boldsymbol{I}$

(b) $3\boldsymbol{I}$

(c) $\boldsymbol{A}^2 + \boldsymbol{I}$

(d) $\boldsymbol{A} - \boldsymbol{I}$

6. Assume that the vectors $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4 \in \mathbb{R}^4$ are linearly independent. Which of the following sequences of vectors is linearly **dependent**? ***Note: only one answer is correct.***

(a) $\mathbf{v}_1,\ \mathbf{v}_3$

(b) $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2,\ \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3,\ \mathbf{v}_3 + \mathbf{v}_1$

(c) $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2,\ \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3,\ \mathbf{v}_3 + \mathbf{v}_4,\ \mathbf{v}_4 + \mathbf{v}_1$

(d) $\mathbf{v}_1,\ 2\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_4,\ \mathbf{v}_3 + \mathbf{v}_4$