07 Sheet, in-class

$Ax=b$

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 5 & -2 \\ -3 & 3 & 12 & -3 \\ 1 & -14 & -7 & -6 \end{bmatrix} x = \begin{pmatrix} -6 \\ -15 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Neue (andere) Vorgehensweise:

$x \in N(A)$
$\Leftrightarrow Ax=0$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = -\begin{bmatrix} -6 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} x_4$$

$$N(A) = \left\{ \lambda \cdot (6,-1,2,1)^T \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

$$Sol(A,b) = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} 6 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \;\middle|\; \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

Anderes Beispiel:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix},$$

Nullraum
$Ax=0$
?

pivot, lin. dep., pivot, lin. dep.

$\}$ 2, also Nullraum braucht 2 Vektoren

$Ax=0$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$x_1 + 2x_2 - 3x_4 = 0 \Rightarrow x_1 = -2x_2 + 3x_4$
$x_3 + 4x_4 = 0 \Rightarrow x_3 = -4x_4$

$$\begin{bmatrix} -2x_2 + 3x_4 \\ x_2 \\ -4x_4 \\ x_4 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Basis of } N(A) = \left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Zurück zur in-class 7:

c) 1, 3, 0, 3

d) Basis of $R(A)$

$$= \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} \right\}$$

7.3

$A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\qquad A \in \mathbb{R}^{3\times 2}$

$A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$\begin{array}{cc} 3 & \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \\ & 2 \end{array} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$\dim(C(A)) = 2$
$\dim(N(A)) = 0$
$\dim(R(A)) = 2$

Rowspace:
Da $\dim(C(A)) = \dim(R(A))$, ist $\dim(R(A)) = 2$; also 2 Vektoren in der Basis.
Welche? Irgendwelche! Hauptsache lin. independent.

Nullraum
$Ax=0$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0$$

$x_1 + x_2 = 0 \Rightarrow 0 = 0$
$x_1 + 2x_2 = 0 \Rightarrow 2x_2 = 0;\ x_2 = 0$
$2x_1 = 0 \Rightarrow x_1 = 0$

$$N(A) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$