

Anwendung / Illustration

Bem. $\sqrt{2}$ ist keine rationale Zahl.

↳ positive Lösung der Gleichung $x^2 = 2$.

Beh. $\exists c \in \mathbb{R} : c^2 = 2$

Bew. Wir betrachten die beiden folgenden Mengen

$$\neq A := \{ a \in \mathbb{R} \mid 1 \leq a \leq 2, a^2 \leq 2 \} \quad (1 \in A)$$

$$\neq B := \{ b \in \mathbb{R} \mid 1 \leq b \leq 2, b^2 \geq 2 \} \quad (2 \in B)$$

Dann gilt: $\forall a \in A \quad \forall b \in B : a \leq b$

denn: angenommen, es gäbe a, b mit $a > b$
dann würde gelten $a \cdot a > b \cdot b$, d.h. $a^2 > b^2 \geq 2$
✗

Dann liefert das Ordnungsvollst.-axiom die Existenz einer reellen Zahl $c \in \mathbb{R}$ mit:

$$\forall a \in A : a \leq c$$

und $\forall b \in B : c \leq b$

Bem. Insbesondere gilt dann $1 \leq c \leq 2$

Beh. $c^2 = 2$

Bew. Annahme : $c^2 \neq 2$

$\leadsto$ entweder $c^2 < 2$ oder $c^2 > 2$

es soll also gelten:

$$\left. \begin{array}{l} 1 \leq c \leq 2 \\ \text{und} \\ c^2 < 2 \end{array} \right\} \Rightarrow c \in A$$

$$\Rightarrow 2 - c^2 > 0 \quad \text{und} \quad 2c + 1 > 1$$

$$\Rightarrow \exists n \in \mathbb{N} \quad (n \geq 1) \quad \text{mit} \quad \boxed{(2c+1) < n(2-c^2)}$$

Archim.

Prinzip

$$\begin{aligned} \text{Dann gilt : } \left(c + \frac{1}{n}\right)^2 &= c^2 + \frac{2c}{n} + \frac{1}{n^2} \\ &\leq c^2 + \frac{2c}{n} + \frac{1}{n} \\ &= c^2 + \frac{1}{n}(2c+1) \\ &\leq c^2 + 2 - c^2 = 2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow c + \frac{1}{n} \leq 2$$

D.h. $\forall a \in A \quad \forall b \in B : a \leq c \leq b$

und $1 \leq c$ und $1 < c + \frac{1}{n} \leq 2$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} 1 < c + \frac{1}{n} \leq 2 \\ \left(c + \frac{1}{n}\right)^2 \leq 2 \end{array} \right\} \Rightarrow c + \frac{1}{n} \in A$$

ausserdem: $c + \frac{1}{n} \leq c$ (da $c + \frac{1}{n} \in A$)

Dies ist aber ein Widerspruch.

D.h. es muss gelten $c^2 \geq 2$.

Analog zu den obigen Überlegungen können wir den Fall $c^2 > 2$ ausschliessen.

Schlussendlich muss also gelten $c^2 = 2$

Bemerkung

Betrachten wir die Mengen

$$\tilde{A} := \{ a \in \mathbb{Q} \mid 1 \leq a \leq 2, a^2 \leq 2 \} \quad \text{und}$$

$$\tilde{B} := \{ b \in \mathbb{Q} \mid 1 \leq b \leq 2, b^2 \geq 2 \}$$

sehen wir, dass beide Mengen nicht leer sind,
dass gilt: $\forall a \in A \quad \forall b \in B: \quad a \leq b$,

aber die trennende Grösse $c = \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Man beachte auch, dass $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists a \in \tilde{A}:$

$$a^2 > 2 - \varepsilon$$

und

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists b \in \tilde{B} : \quad b^2 < 2 + \varepsilon$$

Bedeutung $\sqrt{2}$ kann beliebig gut durch
rationale Zahlen approximiert werden!

Definition

$$1. \max\{x, y\} := \begin{cases} x, & \text{falls } y \leq x, \\ y, & \text{falls } x \leq y, \end{cases}$$

$$2. \min\{x, y\} := \begin{cases} y, & \text{falls } y \leq x, \\ x, & \text{falls } x \leq y, \end{cases}$$

$$3. \text{ Absolutbetrag: } |x| := \max\{x, -x\} = \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ -x, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Satz (Eigenschaften des Absolutbetrags)

1. $|x| \geq 0$.
2. $|x + y| \leq |x| + |y|$ (Dreiecksungleichung).
3. $|x + y| \geq ||x| - |y||$.

Bem. $x \leq |x|$

Satz (Youngsche Ungleichung)

Für jedes $\varepsilon > 0$ und alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt:

$$2|xy| \leq \varepsilon x^2 + \frac{1}{\varepsilon} y^2.$$

Bew. der Youngschen Ungleichung

$$\left(\sqrt{\varepsilon} |x| - \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} |y| \right)^2 \geq 0$$

$$\underbrace{\varepsilon |x|^2 + \frac{1}{\varepsilon} |y|^2 - 2 |x| \cdot |y|}$$

Daraus folgt die Behauptung unmittelbar.

I Logik, Mengen und Zahlen

Teil 3

Laura Kobel-Keller

23. Februar 2026

Vektoren und Vektorräume

Definition

Für $x, y \in \mathbb{R}^n$ ist das **(Standard-)Skalarprodukt** gegeben durch

 $x \cdot y = \langle x, y \rangle = [x, y] := \sum_{i=1}^n x_i y_i$

n Faktoren
n-faches cartesisches Produkt

die **Euklidische Norm** ist gegeben durch

$$\|x\| := \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$$

und der **Euklidische Abstand** zwischen x und y ist gegeben durch

$$d(x, y) := \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2} = \|x - y\|$$

Proposition (Dreiecksungleichung)

Für alle $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$\|x - z\| \leq \|x - y\| + \|y - z\|$$

Wir betrachten die folgende Gleichung

$$x^2 + x + 1 = 0$$

Mitternachtsformel :

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$$
$$= -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

Komplexe Zahlen

Definition

Die **komplexen Zahlen** sind diejenigen Zahlen, die wir schreiben können als

$$z = a + ib = a + bi \quad \text{wobei} \quad a, b \in \mathbb{R}$$

Die Menge aller komplexen Zahlen bezeichnen wir mit $\mathbb{C}$.

Also

$$\mathbb{C} = \{a + ib \mid a, b \in \mathbb{R}\}$$

wobei i eine neue Grösse ist mit $i^2 = -1$

Die Darstellung $z = a + ib$ einer komplexen Zahl nennt man **Normalform** (arithmetische Form, kartesische Form).

a heisst **Realteil**, geschrieben $a = \operatorname{Re}(z)$.

b heisst **Imaginärteil**, geschrieben $b = \operatorname{Im}(z)$.

i ist die **imaginäre/komplexe Einheit** mit der Eigenschaft $i^2 = -1$.

Ist $a = 0$, so nennt man $z = ib$ **rein imaginär**.

Arithmetik der komplexen Zahlen (Rechenregeln)

Addition und Subtraktion

Für zwei komplexe Zahlen $z_1 = x_1 + iy_1$ und $z_2 = x_2 + iy_2$ gilt

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$$

sowie

$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$$

Multiplikation

Für zwei komplexe Zahlen $z_1 = x_1 + iy_1$ und $z_2 = x_2 + iy_2$ gilt

$$z_1 \cdot z_2 = x_1 x_2 - y_1 y_2 + i(x_1 y_2 + y_1 x_2)$$

$$(x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = x_1 x_2 + ix_1 y_2 + \dots$$

Division

Um die Division zweier komplexer Zahlen anzugeben, brauchen wir eine Hilfsgrösse:

Definition

Für eine komplexe Zahl $z = x + iy$ ist die zu z **komplex konjugierte Zahl** gegeben durch

$$\bar{z} = \overline{x + iy} = x - iy$$

Die Division zweier komplexer Zahlen erhalten wir, indem wir mit der komplex konjugierten Zahl des Nenners erweitern und dann wie gewohnt rechnen.

Damit gelten dann auch die folgenden Regeln:

- ▶ $z/w = \frac{z \cdot \bar{w}}{w \cdot \bar{w}} = \frac{z \cdot \bar{w}}{|w|^2}, \quad z, w \in \mathbb{C}$
- ▶ $\overline{z/w} = \bar{z}/\bar{w}, \quad z, w \in \mathbb{C}$

Ans.

$$\frac{1+i}{(1-2i)(1+2i)} = \frac{\dots}{1^2 - (2i)^2} = \frac{\dots}{1+4}$$

$$= \frac{1}{5} (\dots)$$

Satz (Eigenschaften der komplex konjugierten Zahl)

Es gilt:

- ▶ $z \cdot \bar{z} = |z|^2$

- ▶ $z + \bar{z} = 2\operatorname{Re}(z)$ und $z - \bar{z} = 2i \operatorname{Im}(z)$

- ▶ $\overline{\bar{z}} = z$

- ▶ $\overline{z \pm w} = \bar{z} \pm \bar{w}, \quad z, w \in \mathbb{C}$

- ▶ $\overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}, \quad z, w \in \mathbb{C}$

- ▶ $z = \bar{z}$, falls $z \in \mathbb{R}$

- ▶ $\bar{z} = -z$, falls z rein imaginär

Graphische Darstellung von komplexen Zahlen: Gaussche Zahlenebene

Komplexe Zahlen können wir in der Ebene darstellen, indem wir auf der horizontalen Achse den Realteil und auf der vertikalen Achse den Imaginärteil abtragen.

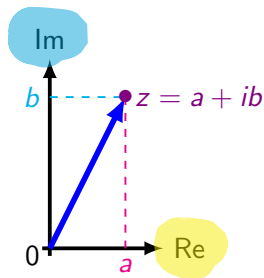


Abbildung: Wir können eine komplexe Zahl z als Punkt in der Ebene oder als Vektor auffassen

Bemerkungen

- ▶ Wir können eine komplexe Zahl z auch als Punkt in der Ebene oder als Vektor auffassen.
- ▶ Die Interpretation der Ebene als Menge der komplexen Zahlen nennt man **komplexe Ebene** oder Gaußsche Zahlenebene.

Definition

Der **Betrag** $|z|$ einer komplexen Zahl $z = a + ib$ ist die Länge des dazugehörigen Vektors

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2},$$

respektive der Abstand vom Ursprung.

Der **Abstand zweier komplexer Zahlen** z_1 und z_2 ist

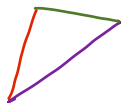
$$d = |z_2 - z_1| = |z_1 - z_2|$$

Satz (Dreiecksungleichung)

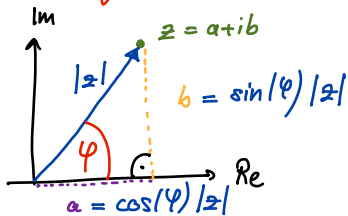
Es gilt für $z, w \in \mathbb{C}$

$$|z + w| \leq |z| + |w|$$

↪ effektive Visualisierung durch Dreieck in der Ebene

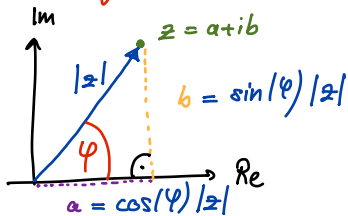


Alternative Beschreibung von komplexen Zahlen in der Ebene



$$\begin{aligned}\Rightarrow z = a + ib &= \cos(\varphi) |z| + i \sin(\varphi) |z| \\ &= |z| (\cos(\varphi) + i \sin(\varphi)) \\ &= |z| e^{i\varphi}\end{aligned}$$

Alternative Beschreibung von komplexen Zahlen in der Ebene



$$\begin{aligned}\Rightarrow z = a + ib &= \cos(\varphi) |z| + i \sin(\varphi) |z| \\ &= |z| (\cos(\varphi) + i \sin(\varphi)) \\ &= |z| e^{i\varphi}\end{aligned}$$