

$$k! = k(k-1)(k-2)\dots \cdot 2 \cdot 1$$

$$0! = 1$$

Die Eulersche Formel

Bem. (*) gilt auch für
 $x \in \mathbb{C}$

Die Exponentialfunktion kann durch eine **Reihenentwicklung** dargestellt werden als

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k$$

(*)

Setzen wir in dieser Formel $x = it$ ein, erhalten wir die **Eulersche Formel**

$$e^{it} = \cos(t) + i \sin(t), \quad t \in \mathbb{R}$$

Bem. zur Herleitung der Eulerschen Formel

$$e^{it} = 1 + it + \frac{1}{2} i^2 t^2 + \frac{1}{3!} i^3 t^3 + \frac{1}{4!} i^4 t^4 + \frac{1}{5!} i^5 t^5 + \dots$$

$$= 1 + it - \frac{1}{2} t^2 - i \frac{1}{3!} t^3 + \frac{1}{4!} t^4 + i \frac{1}{5!} t^5 - \dots$$

$$= \left(1 - \frac{1}{2} t^2 + \frac{1}{4!} t^4 - \dots \right) + i \left(t - \frac{1}{3!} t^3 + \frac{1}{5!} t^5 - \dots \right)$$

$$= \cos(t) + i \cdot \sin(t)$$

Folgerung

Wir können $\sin(t)$ und $\cos(t)$ mit Hilfe von komplexen Exponentialfunktionen schreiben

$$\cos(t) = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2}$$

und

$$\sin(t) = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}$$

$$\begin{aligned}\underline{\text{Denn}} \quad \frac{1}{2} (e^{\underline{it}} + e^{\underline{-it}}) &= \frac{1}{2} (\underline{\cos(t) + i\sin(t)} + \underline{\cos(-t) + i\sin(-t)}) \\ &= \frac{1}{2} (\cos(t) + \cancel{i\sin(t)} + \cos(t) - \cancel{i\sin(t)}) \\ &= \cos(t)\end{aligned}$$

Exponentialfunktion mit komplexen Argumenten

Wir können für die Exponentialfunktion auch komplexe Argumente zulassen.

Dann gelten die folgenden **Regeln**

$$e^{z+w} = e^z \cdot e^w$$

$$e^z = e^{a+ib} = e^a(\cos(b) + i \sin(b))$$

$= e^a \cdot e^{ib}$

und

$$e^{z+i2\pi} = e^z$$

$= e^z \cdot e^{i2\pi} = e^z (\cos(2\pi) + i \sin(2\pi)) = e^z$

und allgemeiner: $e^{z+k \cdot 2\pi i} = e^z, k \in \mathbb{N}$

Polardarstellung

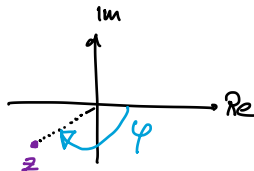
Definition

Eine komplexe Zahl kann auch durch Angabe des Abstandes zum Ursprung und durch Angabe eines geeigneten Winkels beschrieben werden (**Polarform**):

$$\underline{\underline{z = r \cdot e^{i\varphi}}}$$

Dabei gilt

- ▶ $|z| = r \geq 0$
- ▶ $\varphi \in (-\pi, \pi]$ Polarwinkel (Argument)
Und wir schreiben $\varphi = \arg(z) = \arg(z)$



Umrechnung zwischen Polar- und Normalform

Polar- in Normalform	Normal- in Polarform
$z = re^{i\varphi}$	$z = x + iy$
$z = x + iy$	$z = re^{i\varphi}$
$x = r \cos(\varphi)$ $y = r \sin(\varphi)$	$r = z = \sqrt{x^2 + y^2}$ $\varphi = \arctan(\frac{y}{x})$ falls $x > 0$ $\varphi = \arctan(\frac{y}{x}) + \pi$ falls $x < 0$ und $y \geq 0$ $\varphi = \arctan(\frac{y}{x}) - \pi$ falls $x < 0$ und $y < 0$

Achtung : Bei der Umrechnung von Normal- in Polarform ist der Fall $x = y = 0$ ausgeschlossen.

Falls $x = 0$ und $y \neq 0$ verwenden wir die Konvention

$$\arg(iy) = \begin{cases} \pi/2, & y > 0 \\ -\pi/2, & y < 0 \end{cases}$$

Potenzen komplexer Zahlen

Es sind die folgenden **Regeln** zu beachten:

i)

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 e^{i\varphi_1} \cdot r_2 e^{i\varphi_2} = r_1 \cdot r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$$

ii)

$$z_1 / z_2 = r_1 e^{i\varphi_1} / r_2 e^{i\varphi_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}$$

iii)

$$z^n = r^n e^{ni\varphi}$$

Bedeutung: Multiplikation mit $z = r e^{i\varphi}$
bedeutet geometrisch:

- i) Stauchung / Streckung um $|z|$
- ii) Drehung um den Winkel φ
(positiv: Gegenuhzeigersinn)

Illustration:



Als Nächstes: Wir wollen die Gleichung $\underline{z^2} = \underbrace{a+ib = re^{i\varphi}}_{\text{gegeben}}$

Ansatz: $z = s \cdot e^{i\alpha}$

Es muss gelten: $z^2 = s^2 e^{i2\alpha} \stackrel{!}{=} re^{i\varphi}$

$$\Rightarrow \begin{cases} s^2 = r \\ 2\alpha = \varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} s = \sqrt{r} = \underline{\underline{r^{1/2}}} \\ \alpha = \underline{\underline{\varphi/2}} \end{cases}$$

2. Lösung: $\overset{||}{s^2} e^{i2\alpha} = re^{i\varphi} = re^{i(\varphi+2\pi)}$

$$\Rightarrow \begin{cases} s^2 = r \\ 2\alpha = \varphi + 2\pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} s = \underline{\underline{r^{1/2}}} \\ \alpha = \underline{\underline{\varphi/2 + \pi}} \end{cases}$$

Zusammenfassung: 2 Lösungen:

$$\boxed{z_{1,2} = r^{1/2} e^{i(\varphi/2 + k \frac{2\pi}{2})}, k=0,1}$$

Beobachtung: Es gilt wiederum: $z_1 = -z_2$ (warum?)

negativ : Uhrzeigersinn)

Wurzeln aus komplexen Zahlen

Für $n \in \mathbb{N}$ sind die Lösungen der Gleichung

$$z^n = re^{i\varphi}$$

gegeben durch

$$\underbrace{z_k = r^{1/n} e^{i(\varphi/n + k2\pi/n)}, \quad k = 0, \dots, n-1}_{n \text{ Lösungen}}$$

Anwendung des Wurzelziehens: Lösen quadratischer Gleichungen

Problem: Gesucht sind die Lösungen der quadratischen Gleichung

$$az^2 + bz + c = 0,$$

wobei a, b und c komplexe Zahlen sind.

Lösung: Formel (Mitternachtsformel)

$$z_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Bem. $\pm \sqrt{b^2 - 4ac}$: Damit sind die beiden Lösungen von $w^2 = b^2 - 4ac$ gemeint

Theorem (Fundamentalsatz der Algebra)

Jedes Polynom

$$p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} \cdots + a_1 z + a_0 = \sum_{k=0}^n a_k z^k, \quad a_k \in \mathbb{C}$$

kann in n **Linearfaktoren** faktorisiert werden, d.h. geschrieben werden als

$$p(z) = a_n (z - z_1)(z - z_2) \cdots (z - z_{n-1})(z - z_n).$$

n Faktoren

$z_1, z_2, \dots$: Nullstellen

Die Zahlen z_k sind also gerade die Nullstellen von $p(z)$ (mit **Vielfachheit**).

Allgemeine Merkregel

Die nicht-reellen Nullstellen eines Polynoms mit **reellen** Koeffizienten treten in komplex konjugierten Paaren auf.

Bsp.

$$x^3 - 5x^2 + 17x - 13 = 0$$

Raten geschickt: $x=1$ ist Lsg.

Weiter mit Polynomdivision

$$(x^3 - 5x^2 + 17x - 13) : (x - 1) = \dots$$

(*)

↪ weitere Nullstellen sind: $x = 2 + 3i$
und
 $x = 2 - 3i$

Bem.

Die Funktionen $y(x) = e^x = e^{1x}$, $y(x) = e^{2x} \sin(3x)$
und $y(x) = e^{2x} \cos(3x)$ lösen die folgende Diff.-gl.

$$y^{(3)}(x) - 5y''(x) + 17y'(x) - 13y(x) = 0$$

zu (*) : Polynomdivision

$$(x^3 - 5x^2 + 17x - 13) : (x - 1) = x^2 - 4x + 13$$

$$\begin{array}{r} -x^3 + x^2 \\ \hline \end{array}$$

$$-4x^2 + 17x - 13$$

$$+ 4x^2 - 4x$$

$$\hline 13x - 13$$

$$-13x + 13$$

$$\hline 0$$

Die Nullstellen von $x^2 - 4x + 13$

können nun mit Hilfe der

Mitternachtsformel bestimmt werden:

$$x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 52}}{2}$$

$$= \frac{4 \pm \sqrt{-36}}{2} = \frac{4 \pm i6}{2}$$

$$= \begin{cases} 2 + 3i \\ 2 - 3i \end{cases}$$