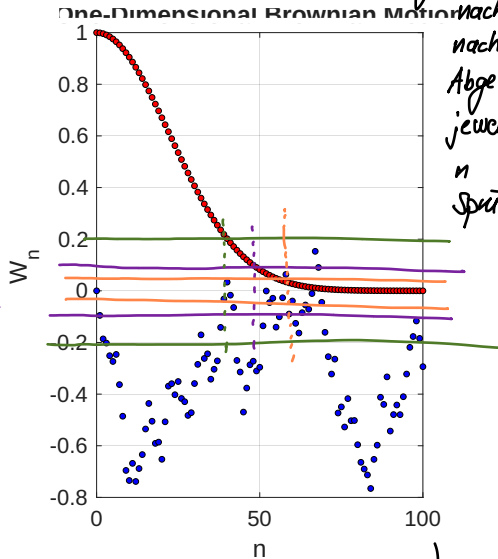


II Folgen

Laura Kobel-Keller

2. März 2026

blau: Simulation einer Brownschen Bewegung:
mit gleichbleibender Wahrscheinlichkeit springt ein Teilchen
nach rechts oder nach links.



Abgebildet ist die
jeweilige Position nach
n Zeiten/möglichen
Sprüngen

rot: exponentiell abfallende Größe ($\sim$ z.B. Diffusion) $\sim e^{-n^2}$

Das Konzept Folge

Definition

Eine **Folge** $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ (auch geschrieben als $(a_n)_{n \geq 0}$ oder $(a_n)_{n=0}^\infty$) ist eine (unendliche) Liste von Zahlen, wobei jeder solche Eintrag ein **Glied der Folge** genannt wird.

Eine Folge kann auch als Abbildung (*Funktion*)

$$\underline{f} : \underline{\mathbb{N}_0} \rightarrow \mathbb{R} \quad (\text{oder } f : \underline{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{R})$$

aufgefasst werden.

Die **Bilder** $a(n) = a_n$ sind dann gerade die Elemente der Folge.

Bsp. i) $a_n = (-1)^n$, 1 und -1 sind Häufungspunkte (*)
Es gibt aber keinen Grenzwert!

ii) $b_0 = 0, b_1 = 1, b_2 = 1, b_3 = 2, b_4 = 3, b_5 = 5$
$$b_n = b_{n-1} + b_{n-2}, \quad n \geq 2$$

Fibonacci-Folge

iii)
$$c_n = \begin{cases} 1/n, & \text{falls } n=3k, k \in \mathbb{N} \\ n, & \text{sonst} \end{cases}$$

(*) Bem. Eine solche Folge nennt man auch
alternierend (Vorzeichen wechseln immer
von einem Folgenglied zum nächsten)

Möglichkeiten der Darstellung einer Folge

Eine Möglichkeit, eine solche Folge zu beschreiben, ist, dass wir **direkt** (explizit) angeben, wie ein beliebiges Folgenglied berechnet werden kann, also

$$a_n = f(n)$$

Eine andere Möglichkeit ist, dass wir jedes neue Folgenglied aus den vorangehenden konstruieren, die Folge also **rekursiv** beschreiben, d.h.

$$a_n = g(a_{n-1}, a_{n-2}, \dots)$$

f und g nennt man jeweils **Bildungsgesetz**.

Konvergenz und Divergenz einer Folge

Definition

„ein einziges, ausgezeichnetes Langzeitverhalten“

Eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0} \subset \mathbb{R}$ heisst **konvergent**, falls ein $L \in \mathbb{R}$ existiert, so dass

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N > 0 \text{ so dass } \forall n > N : |a_n - L| < \varepsilon$$

L wird dann **Grenzwert** genannt, und man schreibt

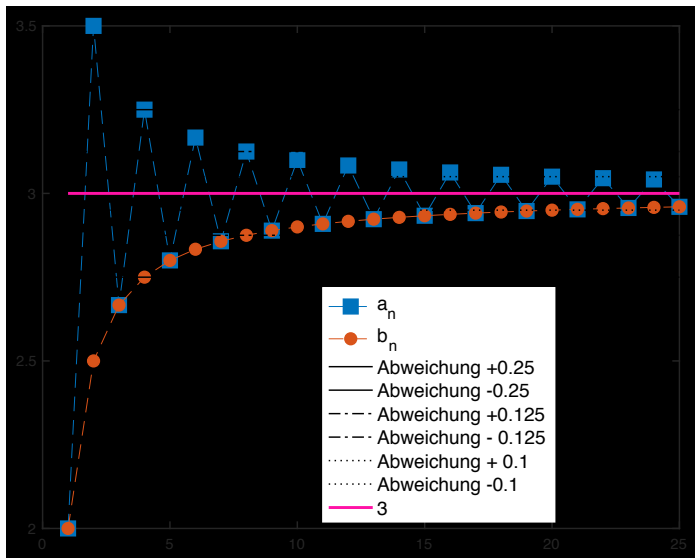
$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$$

Falls kein L mit obigen Eigenschaft existiert, nennt man die Folge **divergent**.

Anschaulich formuliert: Eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ konvergiert gegen L , falls für genügend grosse n die Werte a_n immer näher bei L liegen.

Illustration zur Konvergenz

$$a_n = 3 + \frac{(-1)^n}{n}, \quad b_n = 3 - \frac{1}{n}$$



Satz

Eine konvergente Folge besitzt genau einen eindeutigen Grenzwert.

Beweis

Widerspruchswise nehmen wir an, es gebe
2 Grenzwerte (voneinander verschieden):

A und B (der Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$).

Dann gilt gemäss Definition der Konvergenz,
dass insbesondere ein $N_A \in \mathbb{N}$ existiert,
so dass gilt:

$$\forall n > N_A : |a_n - A| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Andererseits muss aber - auch wieder gemäss
Definition - ein $N_B \in \mathbb{N}$ existieren, so dass gilt:

$$\forall n > N_B : |a_n - B| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Nun setzen wir $N := \max \{ N_A, N_B \}$.

Dann gilt aber: mit $n > N$

$$\begin{aligned} |A - B| &\leq |A - a_n| + |a_n - B| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

Da die obige Überlegung für alle ε (noch so klein) zutrifft, muss gelten $A = B$ $\downarrow$

Widerspruch zur Annahme

D.h. es muss gelten $A = B$.

Spezialfälle divergenter Folgen

- Falls für eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ gilt:

$$\forall M > 0 \exists N > 0 \text{ so dass } \forall n > N : a_n > M$$

sagen wir, dass die Folge **gegen unendlich** divergiert und schreiben

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$$

- Falls für eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ gilt:

$$\forall M > 0 \exists N > 0 \text{ so dass } \forall n > N : a_n < -M$$

sagen wir, dass die Folge **gegen minus unendlich** divergiert und schreiben

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$$

uneigentliche

Grenzwerte

Definition

Es sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine Folge in $\mathbb{R}$.

Eine **Teilfolge** ist eine Folge der Form

$$(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}_0},$$

wobei $(n_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ eine Folge nicht-negativer ganzer Zahlen ist mit $n_{k+1} > n_k$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$.

n_k : „Auswahlliste der Indizes“

Lemma

Es sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine konvergente Folge mit Grenzwert $L \in \mathbb{R}$.

Dann konvergiert auch jede Teilfolge gegen den gleichen Grenzwert L .

Bsp. Wollen wir z.B. nur jedes 3. Folgeglied auswählen, aber beim 2. Folgeglied beginnen, also die Elemente a_2, a_5, a_8 etc. auswählen, können wir schreiben (a_{2+3k})

Definition

Es sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine Folge in $\mathbb{R}$.

Ein **Häufungspunkt** $A \in \mathbb{R}$ dieser Folge, falls

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \forall N \in \mathbb{N}_0 \quad \exists n \geq N \quad \text{so dass} \quad |a_n - A| < \varepsilon$$

Anschaulich formuliert: Jedes Intervall der Form $(A - \varepsilon, A + \varepsilon)$ enthält a_n für unendlich viele Indizes n .