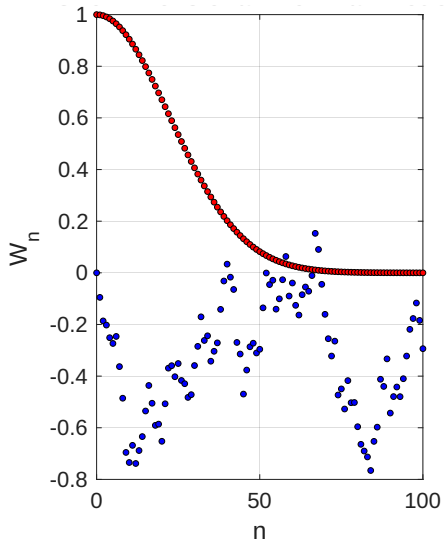


II Folgen

Laura Kobel-Keller

2. März 2026



Das Konzept Folge

Definition

Eine **Folge** $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ (auch geschrieben als $(a_n)_{n \geq 0}$ oder $(a_n)_{n=0}^\infty$) ist eine (unendliche) Liste von Zahlen, wobei jeder solche Eintrag ein **Glied der Folge** genannt wird.

Eine Folge kann auch als Abbildung

$$f : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{R} \quad (\text{oder } f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R})$$

aufgefasst werden.

Die **Bilder** $a(n) = a_n$ sind dann gerade die Elemente der Folge.

Möglichkeiten der Darstellung einer Folge

Eine Möglichkeit, eine solche Folge zu beschreiben, ist, dass wir **direkt** (explizit) angeben, wie ein beliebiges Folgenglied berechnet werden kann, also

$$a_n = f(n)$$

Eine andere Möglichkeit ist, dass wir jedes neue Folgenglied aus den vorangehenden konstruieren, die Folge also **rekursiv** beschreiben, d.h.

$$a_n = g(a_{n-1}, a_{n-2}, \dots)$$

f und g nennt man jeweils **Bildungsgesetz**.

Konvergenz und Divergenz einer Folge

Definition

Eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0} \subset \mathbb{R}$ heisst **konvergent**, falls ein $L \in \mathbb{R}$ existiert, so dass

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N > 0 \text{ so dass } \forall n > N : |a_n - L| < \varepsilon$$

L wird dann **Grenzwert** genannt, und man schreibt

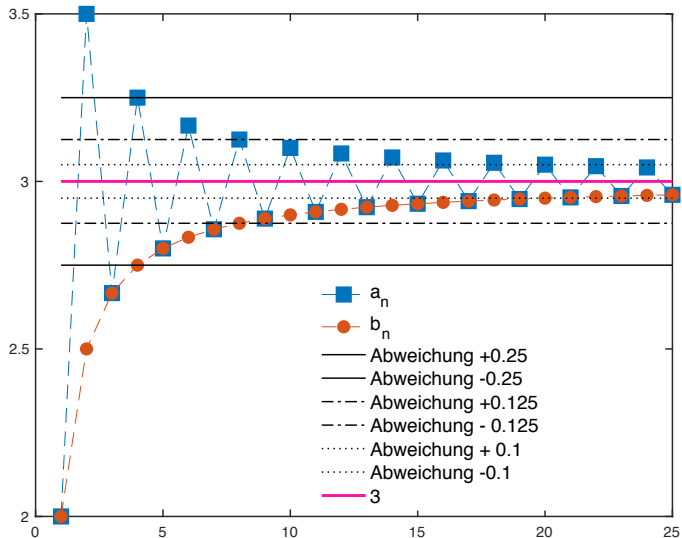
$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$$

Falls kein L mit obigen Eigenschaft existiert, nennt man die Folge **divergent**.

Anschaulich formuliert: Ein Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ konvergiert gegen L , falls für genügend grosse n die Werte a_n immer näher bei L liegen.

Illustration zur Konvergenz

$$a_n = 3 + \frac{(-1)^n}{n}, \quad b_n = 3 - \frac{1}{n}$$



Satz

Eine konvergente Folge besitzt genau einen eindeutigen Grenzwert.

Spezialfälle divergenter Folgen

- Falls für eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ gilt:

$$\forall M > 0 \exists N > 0 \text{ so dass } \forall n > N : a_n > M$$

sagen wir, dass die Folge **gegen unendlich** divergiert und schreiben

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$$

- Falls für eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ gilt:

$$\forall M > 0 \exists N > 0 \text{ so dass } \forall n > N : a_n < -M$$

sagen wir, dass die Folge **gegen minus unendlich** divergiert und schreiben

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$$

Definition

Es sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine Folge in $\mathbb{R}$.

Eine **Teilfolge** ist eine Folge der Form

$$(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}_0},$$

wobei $(n_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ eine Folge nicht-negativer ganzer Zahlen ist mit $n_{k+1} > n_k$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$.

Lemma

Es sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine konvergente Folge mit Grenzwert $L \in \mathbb{R}$.

Dann konvergiert auch jede Teilfolge gegen den gleichen Grenzwert L .

Definition

Es sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine Folge in $\mathbb{R}$.

Ein **Häufungspunkt** $A \in \mathbb{R}$ dieser Folge, falls

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \forall N \in \mathbb{N}_0 \quad \exists n \geq N \quad \text{so dass} \quad |a_n - A| < \varepsilon$$

Anschaulich formuliert: Jedes Intervall der Form $(A - \varepsilon, A + \varepsilon)$ enthält a_n für unendlich viele Indizes n .

Satz

Es sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine Folge in $\mathbb{R}$.

$A \in \mathbb{R}$ ist ein Häufungspunkt der betrachteten Folge genau dann, wenn eine konvergente Teilfolge $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}_0}$ existiert mit

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = A.$$

Korollar

Jede konvergente Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ in $\mathbb{R}$ hat genau einen Häufungspunkte, welcher mit dem Grenzwert der betrachteten Folge übereinstimmt.

Korollar

Sei A ein Häufungspunkt der Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$. Dann gibt es für jedes $\varepsilon > 0$ unendlich viele Folgeglieder, welche im Intervall $(A - \varepsilon, A + \varepsilon)$ liegen.

Einige wichtige Rechenregeln

Satz

Wir nehmen an, es gelte $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = K (\neq \pm\infty)$,
 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = L (\neq \pm\infty)$ und C sei eine beliebige feste Zahl.

Dann gilt:

- i) $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = K + L$
- ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = K - L$
- iii) $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = K \cdot L$
- iv) $\lim_{n \rightarrow \infty} (C \cdot a_n) = C \cdot K$
- v) Falls $L \neq 0$ und $b_n \neq 0$, haben wir $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n/b_n) = K/L$
- vi) Falls gilt $K < L$, so gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, so dass gilt $a_n < b_n$ für alle $n \geq N$.
- vii) Falls es ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, so dass gilt $a_n \leq b_n$ für alle $n \geq N$, so gilt auch $K \leq L$.

Wichtige Grenzwerte

Satz

$$\text{i) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log n}{n} = 0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{n}$$

$$\text{ii) } \lim_{n \rightarrow \infty} n^{1/n} = 1$$

$$\text{iii) } \lim_{n \rightarrow \infty} x^{1/n} = 1, \quad x > 0$$

$$\text{iv) } \forall x \in \mathbb{R} : \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x$$

$$\text{v) } \forall x \in \mathbb{R} : \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n}{n!} = 0$$

Satz (Sandwich-Theorem)

Es seien $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ und $(c_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ zwei konvergente Folgen mit gleichem Grenzwert gegeben

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L \quad \text{und} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = L$$

sowie eine dritte Folge $(b_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ mit der Eigenschaft, dass ein $N_0 \in \mathbb{N}$ existiert, so dass gilt

$$a_n \leq b_n \leq c_n \quad \forall n \geq N_0.$$

Dann ist auch die Folge $(b_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ konvergent und es gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = L$$

Definition

- ▶ Eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ nennen wir **nach unten/oben beschränkt**, falls die Menge $M = \{a_n | n \in \mathbb{N}_0\}$ eine untere/obere Schranke besitzt.
Eine Folge, welche nach oben und nach unten beschränkte ist, nennen wir kurz **beschränkte Folge**.
- ▶ Eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ nennen wir **monoton fallend/monoton wachsend**, falls gilt

$$\forall n, m \in \mathbb{N}_0 : m > n \Rightarrow a_m \leq a_n$$

respektive

$$\forall n, m \in \mathbb{N}_0 : m > n \Rightarrow a_m \geq a_n$$

Eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ nennen wir **streng monoton fallend/streng monoton wachsend**, falls gilt

$$\forall n, m \in \mathbb{N}_0 : m > n \Rightarrow a_m < a_n$$

respektive

$$\forall n, m \in \mathbb{N}_0 : m > n \Rightarrow a_m > a_n$$

Satz

Jede beschränkte und monotone Folge konvergiert.