

III Reihen

Laura Kobel-Keller

16. März 2026

Situation: Medikamenteneinnahme

Ein Patient nimmt ein Antibiotikum in regelmässigen Zeitabständen ein.

Unser Ziel ist es, die Konzentration des Antibiotikums zu verschiedenen Zeiten zu beschreiben.

Dabei wissen wir:

- ▶ Jede Dosis besteht aus 250mg des Medikaments.
- ▶ Alle 6 Stunden wird eine Tablette verabreicht.
- ▶ In 6 Stunden werden 96% des Medikaments abgebaut.

Es gilt:

- ▶ **Vor** der Einnahme der n.-ten Tablette beträgt die Medikamentenmenge im Blut

$$\begin{aligned}a_n &= 250 \cdot (0.04 + \dots + 0.04^{n-1}) = \sum_{k=1}^{n-1} 250 \cdot 0.04^k \\&= 250 \sum_{k=1}^{n-1} 0.04^k = 250 \cdot 0.04 \frac{1 - 0.04^{n-1}}{1 - 0.04}\end{aligned}$$

- ▶ **Nach** der Einnahme der n.-ten Tablette beträgt die Medikamentenmenge im Blut

$$\begin{aligned}p_n &= 250 \cdot (1 + 0.04 + \dots + 0.04^{n-1}) = \sum_{k=0}^{n-1} 250 \cdot 0.04^k \\&= 250 \sum_{k=0}^{n-1} 0.04^k = 250 \frac{1 - 0.04^n}{1 - 0.04}\end{aligned}$$

Illustration der Medikamentenmenge vor und nach der Einnahme

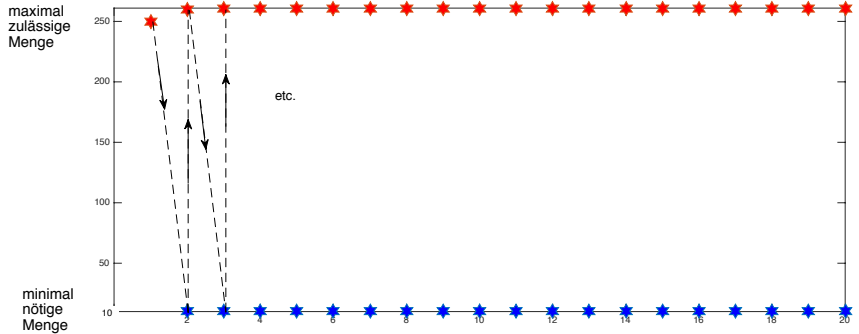


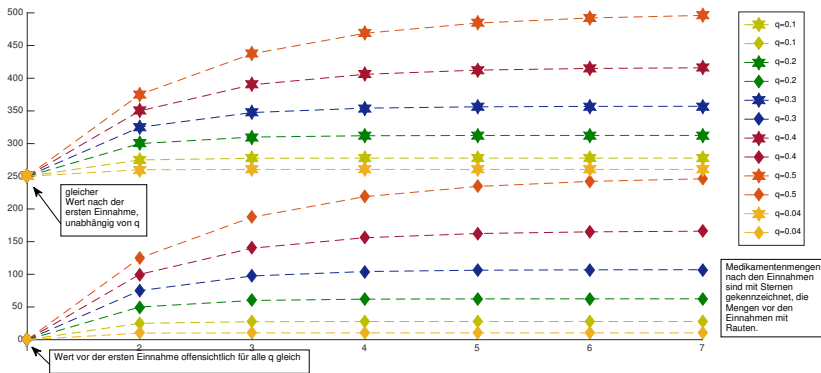
Abbildung: Medikamentenmenge

Beobachtung

Die Werte p_n und a_n sind gerade die Partialsummen zweier geometrischer Reihen mit $q = 0.04$ und Anfangswert $a = 250$, respektive $a = 250 \cdot 0.04$.

Die Illustration auf der folgenden Seite verdeutlicht die Bedeutung der Abbaurate, die dem q entspricht.

Je grösser q ist (d.h. je weniger gut das Medikament abgebaut wird), desto grösser sind die Grenzwerte $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ und desto länger geht es, bis die Sättigung erreicht ist.



Definition

- Einen (formalen) Ausdruck der Form

$$a_0 + a_1 + a_2 + \cdots = \sum_{i=0}^{\infty} a_i$$

nennt man eine **Reihe** und die a_n heissen **Glieder**, **Elemente** oder **Summanden** der Reihe.

- Falls die Folge der **Teilsummen** (**Partialsummen**)

$$s_n := a_0 + a_1 + \cdots + a_n = \sum_{k=0}^n a_k$$

gegen einen Grenzwert $L < \infty$ konvergiert, so sagen wir, dass die Reihe **konvergiert** und schreiben

$$a_0 + a_1 + \cdots = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_k = L$$

L nennt man dann auch den **Wert** der Reihe.

- Eine Reihe, welche nicht konvergiert, nennt man **divergent**.

Satz (Notwendiges Kriterium für Konvergenz)

Falls eine Reihe konvergiert, muss zwingend gelten

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0,$$

d.h. $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ ist eine **Nullfolge**.

Lemma

Es seien $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ konvergente Reihen. Dann gilt



$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n$$



$$\sum_{n=0}^{\infty} C \cdot a_n = C \sum_{n=0}^{\infty} a_n, \quad (C \in \mathbb{R})$$

Lemma

Es sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ eine Reihe.

Für $N \in \mathbb{N}_0$ ist $\sum_{n=N}^{\infty} a_n$ genau dann konvergent, wenn $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergiert, und in diesem Fall gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{N-1} a_n + \sum_{n=N}^{\infty} a_n.$$

Satz

Es sein $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ eine Reihe nicht-negativer Elemente
 $a_n \geq 0 \forall n \in \mathbb{N}_0$.

Dann ist die Folge der Partialsummen $s_n = \sum_{k=0}^n a_k$ monoton wachsend.

Falls die Folge $(s_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ beschränkt ist, konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, andernfalls divergiert sie.

Satz (Vergleichskriterium)

Wir betrachten Reihen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ mit nicht-negativen Gliedern und für eine natürliche Zahl $N \in \mathbb{N}$ gelte

$$c_n \leq b_n \leq a_n \quad \forall n \geq N$$

Dann gilt

- ▶ Falls $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergiert, konvergiert auch $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ (Majorantenkriterium).
- ▶ Falls $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ divergiert, divergiert auch $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ (Minorantenkriterium).

Definition

- ▶ Eine Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ nennt man **absolut konvergent**, falls $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ konvergiert.
- ▶ Eine Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ nennt man **bedingt konvergent**, falls $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergiert, aber nicht absolut konvergiert.

Satz (Riemannscher Umordnungssatz)

Es sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ eine bedingt konvergente Reihe reeller Summanden, und es sei $L \in \mathbb{R}$.

Dann gibt es eine bijektive Abbildung $\varphi : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0$, so dass gilt

$$L = \sum_{n=0}^{\infty} a_{\varphi(n)}$$

Satz (Umordnungssatz für absolut konvergente Reihen)

Es sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ eine absolut konvergente Reihe reeller Summanden, und es sei $\varphi : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0$ eine Bijektion.

Dann konvergiert

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{\varphi(n)}$$

absolut, und es gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_{\varphi(n)}$$

Satz (Leibnitz Kriterium)

Es sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine monoton fallende Folge nicht-negativer reeller Zahlen, welche gegen null konvergiert.

Dann konvergiert die **alternierende Reihe** $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$ und es gilt

$$\sum_{n=0}^{2m+1} (-1)^n a_n \leq \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n \leq \sum_{n=0}^{2m} (-1)^n a_n \quad \forall m \in \mathbb{N}_0.$$

Satz (Cauchy Kriterium)

Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergiert genau dann, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ ein Index $N \in \mathbb{N}_0$ existiert, so dass für $n \geq m \geq N$ gilt

$$\left| \sum_{k=m+1}^n a_k \right| \leq \varepsilon$$

Satz

Jede absolut konvergente Reihe konvergiert und es gilt die **verallgemeinerte Dreiecksungleichung**

$$\left| \sum_{n=0}^{\infty} a_n \right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$$

Satz (Wurzel-Kriterium)

Es sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine Folge reeller Zahlen, und es sei

$$\rho = \limsup_{n \rightarrow \infty} (|a_n|)^{1/n} \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}.$$

Dann gilt

- ▶ Falls $\rho < 1$, konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ absolut.
- ▶ Falls $\rho > 1$, konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ nicht.

Satz (Quotienten-Kriterium)

Es sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine Folge reeller Zahlen mit $a_n \neq 0 \forall n \in \mathbb{N}_0$, und es sei

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$$

Dann gilt

- ▶ Falls $\rho < 1$, konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ absolut.
- ▶ Falls $\rho > 1$, konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ nicht.

Satz (Cauchy-Produkt)

Es seien $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ zwei absolut konvergente Reihen, dann gilt

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n a_{n-k} b_k\right),$$

und die Reihe auf der rechten Seite konvergiert absolut.

Definition

Eine Reihe der Form

$$c_0 + c_1(x - a) + c_2(x - a)^2 + c_3(x - a)^3 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(x - a)^k$$

heisst **Potenzreihe** um den **Entwicklungspunkt** a und mit **Koeffizienten** $c_0, c_1, c_2, \dots$ und **Argument** x .

Definition

Falls für ein festes x die Folge der Teilsummen (Partialsummen)

$$s_n(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \cdots + c_n(x-a)^n = \sum_{k=0}^n c_k(x-a)^k$$

konvergiert, so sagen wir, dass die Potenzreihe für das betrachtete Argument x **konvergiert**.

Satz

Es gelten die folgenden Tatsachen:

- i) Jede Potenzreihe besitzt einen **Konvergenzradius** R , so dass gilt:
die Reihe konvergiert für x mit $|x - a| < R$ und
die Reihe divergiert für x mit $|x - a| > R$.
- ii) Das Intervall $(a - R, a + R)$ heisst **Konvergenzintervall**.
- iii) Der Konvergenzradius R lässt sich mit der folgenden Formel berechnen: Es sei

$$\rho = \limsup_{n \rightarrow \infty} |c_n|^{1/n}$$

Dann ist R gegeben durch

$$R = \begin{cases} 0, & \text{falls } \rho = \infty \\ \rho^{-1}, & \text{falls } 0 < \rho < \infty \\ \infty, & \text{falls } \rho = 0 \end{cases}$$